Introducción a la Mecánica Cuántica

Guillermo Morales-Luna
Departamento de Computación
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav-IPN
gmorales@cs.cinvestav.mx

3 de enero de 2011

Contenido

Resumen

El presente pretende ser un curso introductorio a la Mecánica Cuántica, en general, desde un enfoque puramente matemático y quiere, en última instancia, servir de apoyo a estudiantes de Cómputo Cuántico interesados en conocer sus fundamentos físicos.

Por el momento, sólo consta de un primer capítulo donde se presenta las bases de la geometría diferencial necesaria para presentar posteriormente la teoría general de la relatividad.

El curso pues está en estado de permanente construcción y se irá añadiendo sus diversas partes gradualmente.

Capítulo 1

Geometría Diferencial y Relatividad

Seguiremos aquí la presentación de Carroll [1].

1.1 Transformaciones de Lorentz

El *espacio-tiempo* es el espacio real de 4 dimensiones, $\mathbb{R}^4$. Si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, diremos que las tres primeras coordenadas son *espaciales* y la cuarta $x_3 = t$ es *temporal*. Ahí consideramos la forma cuadrática $G_c : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por la matriz

$$G_c = \mathrm{diag}[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -c^2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

con $c \in \mathbb{R}^+$ (usualmente c es la velocidad de la luz). Se tiene pues:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \; G_c(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T G_c \mathbf{x}.$$

Ahora bien:

$$G_c(\mathbf{x}) \leq 0 \iff \frac{1}{x_3^2}\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right) \leq c^2 \iff v^2 \leq c^2$$

donde

$$v^2 = \frac{1}{x_3^2}\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right) = \frac{\|(x_0, x_1, x_2)\|^2}{t^2}. \tag{1.2}$$

Así el espacio $\mathbb{R}^4$ queda dividido en tres conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} G_c^- & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 < c^2 x_3^2\} \\ G_c^0 & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = c^2 x_3^2\} \\ G_c^+ & = & \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > c^2 x_3^2\} \end{array} \tag{1.3}$$

llamadas respectivamente de puntos *temporales*, *lumínicos* y *espaciales*.

Con fines de normalización, consideremos $c = 1$ y $G = G_1$. La pareja $(\mathbb{R}^4, G)$ se dice ser el *espacio de Minkowski*. Sea $Q_G : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto Q_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T G_c (\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Para un punto $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^4$, la *traslación* $T_{\mathbf{z}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{z}$, es tal que $Q_G(T_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{z}}(\mathbf{y})) = Q_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es decir, es una *isometría*. Para una transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ se tendrá

$$\left[\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 : \; Q_G(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})) = Q_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right] \iff L^T G L = G.$$

Sea $\mathcal{L} = \{L \in \mathbb{R}^{4\times 4} | \; L^T G L = G\}$. Claramente, $\mathcal{L}$ es un subgrupo del grupo multiplicativo $(\mathbb{R}^{4\times 4}, \cdot)$ de matrices de orden 4×4, y se llama *grupo de transformaciones de Lorentz*. Al escribir una matriz $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

como $L = \begin{pmatrix} L_e & \ell_{et} \\ \ell_{te}^T & \ell_{tt} \end{pmatrix}$, se tiene

$$\begin{array}{rcl} L^T G L & = & \begin{pmatrix} L_e^T & \ell_{te} \\ \ell_{et}^T & \ell_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_e & \ell_{et} \\ \ell_{te}^T & \ell_{tt} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} L_e^T & \ell_{te} \\ \ell_{et}^T & \ell_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_e & \ell_{et} \\ -\ell_{te}^T & -\ell_{tt} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} L_e^T L_e - \ell_{te}\ell_{te}^T & L_e^T \ell_{et} - \ell_{tt}\ell_{te} \\ \ell_{et}^T L_e - \ell_{tt}\ell_{te}^T & \ell_{et}^T \ell_{te} - \ell_{tt}^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

por tanto $L \in \mathcal{L}$ si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{rcl} L_e^T L_e - \ell_{te}\ell_{te}^T & = & \mathrm{Id}_e \\ L_e^T \ell_{et} & = & \ell_{tt}\ell_{te} \\ \ell_{et}^T \ell_{te} - \ell_{tt}^2 & = & -1 \end{array} \tag{1.4}$$

En particular, valen las relaciones (1.4) si $\ell_{et} = \ell_{et} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$, $|\ell_{tt}| = 1$ y $L_e \in \mathrm{O}(3)$ es una matriz unitaria de orden 3×3. Tenemos así que el grupo $\mathrm{O}(3)$ se identifica con un subgrupo del grupo de Lorentz mediante el monomorfismo $\mu : L_e \mapsto \begin{pmatrix} L_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$. Si se considera el grupo especial $\mathrm{SO}(3)$ que consta de las transformaciones unitarias que preservan orientación, es decir aquellas con determinante 1, su imagen $\mu(\mathrm{SO}(3))$ es el *grupo especial de Lorentz*. De hecho, es usual escribir $\mu(\mathrm{O}(3)) = \mathrm{O}(3,1)$ y $\mu(\mathrm{SO}(3)) = \mathrm{SO}(3,1)$.

Por ejemplo, una rotación

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & \operatorname{sen} s & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $s \in [-\pi, \pi]$, es un elemento de $\mathrm{SO}(3,1)$.

Como otro ejemplo, una *rotación espacio-temporal* (llamada en inglés *boost* (*empujón*)) es de la forma

$$L_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh s & -\operatorname{senh} s \\ 0 & 0 & -\operatorname{senh} s & \cosh s \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

con $s \in \mathbb{R}$. La transformación L_s satisface las relaciones (1.4), por lo que está en el grupo de Lorentz. Dado un sistema de referencia con coordenadas $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, t)$, sea $(u_0, u_1, u_2, t_u) = \mathbf{u} = L_s(\mathbf{x})$ el vector de coordenadas de un nuevo sistema al aplicar L_s. Se tiene que cuando $u_2 = 0$, se ha de tener $x_2 \cosh s - t \operatorname{senh} s = 0$, o sea

$$v = \frac{x_2}{t} = \frac{\operatorname{senh} s}{\cosh s} = \tanh s \text{ por lo cual } s = \tanh^{-1} v.$$

de donde, en general se tendrá

$$u_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \quad t_u = \frac{t - vx_2}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{1.6}$$

Las relaciones (1.6) determinan el *estrechamiento de la distancia* y la *dilatación del tiempo*. El eje u_2 (en el espacio imagen) es $U_2 = \{(u_0, u_1, u_2, t_u) \in \mathbb{R}^4 | \; u_0 = u_1 = t_u = 0\}$ y el eje t_u es $T_u = \{(u_0, u_1, u_2, t_u) \in \mathbb{R}^4 | \; u_0 = u_1 = u_3 = 0\}$. Sus imágenes inversas bajo la rotación espacio-temporal son respectivamente

$$\begin{array}{rcl} L_s^{-1}(U_2) & = & \{(x_0, x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^4 | \; x_0 = x_1 = 0 \;\&\; x_2 = t \tanh s\} \\ L_s^{-1}(T_u) & = & \{(x_0, x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^4 | \; x_0 = x_1 = 0 \;\&\; t = x_2 \tanh s\} \end{array}$$

de donde se ve que "tiempo" y "distancia" en el marco "x" se intercambian en el marco "u". Ahora bien

$$v = \tanh s \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} +1 \text{ y } v = \tanh s \underset{s \to -\infty}{\longrightarrow} -1,$$

así que al "acercarse a la velocidad de la luz", $L_s^{-1}(U_2)$ y $L_s^{-1}(T_u)$ tienden a las rectas $x_2 = \pm t$, similarmente, en el marco "u", U_2 y T_u tienden a las rectas $u_2 = \pm t_u$.

1.2 Marcos de referencia

Sea $E = (\mathbf{e}_j)_{j=0}^3$ una base de $\mathbb{R}^4$. Naturalmente, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\ \exists! x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} :\ \mathbf{x} = \sum_{j=0}^3 x_j \mathbf{e}_j$, la cuarteta $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ se dice ser de *coordenadas* del punto $\mathbf{x}$ respecto a la base E (es evidente que cometemos un abuso de notación al denotar de igual manera al punto $\mathbf{x}$ y a la cuarteta $\mathbf{x}$).

La base E es *ortonormal* respecto a la métrica de Minkowski $G = (g_{ij})_{i,j\in[\![0,3]\!]}$ si $E^T G E = G$, es decir $\forall i, j \in [\![0, 3]\!]$: $\mathbf{e}_i^T G \mathbf{e}_j = g_{ij}$. Por ejemplo, la base canónica es ortonormal respecto a G.

Dada otra base $F = (\mathbf{f}_i)_{i=0}^3$, sea $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T$ la cuarteta de coordenadas del punto $\mathbf{x}$ respecto a esta nueva base. Si hubiese una transformación lineal L tal que $\mathbf{u} = L\mathbf{x}$, es decir para cada i, $u_i = \sum_{j=0}^3 \ell_{ij} x_j$, entonces

$$\sum_{j=0}^3 x_j \mathbf{e}_j = \mathbf{x} = \sum_{i=0}^3 u_i \mathbf{f}_i = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \ell_{ij} x_j\ \mathbf{f}_i = \sum_{j=0}^3 x_j \sum_{i=0}^3 \ell_{ij} \mathbf{f}_i,$$

y por tanto $\forall j \in [\![0, 3]\!] :\ \mathbf{e}_j = \sum_{i=0}^3 \ell_{ij} \mathbf{f}_i$. Así, si E y F denotan también a las matrices cuyas columnas son los correspondientes vectores básicos, se ha de tener $E = FL$. Así pues, en concordancia con la *fórmula de cambio de bases*:

$$E = FL \iff \left[\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 :\ \mathbf{u} = L\mathbf{x}\right] \tag{2.1}$$

Por tanto, si L es una transformación de Lorentz, y E es ortonormal respecto a G, se tiene

$$F^T G F = (EL^{-1})^T G E L^{-1} = (L^{-1})^T (E^T G E) L^{-1} = (L^{-1})^T G L^{-1} = G$$

(pues L^{-1} es de Lorentz). Por tanto F también ha de ser ortonormal.

Recordamos que el espacio dual $(\mathbb{R}^4)^*$ consta de todas las funcionales lineales $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ y es en sí isomorfo a $\mathbb{R}^4$ mismo. Si $E = (\mathbf{e}_j)_{j=0}^3$ es una base de $\mathbb{R}^4$ la *base dual* $E^* = (\mathbf{e}_i^*)_{i=0}^3$ de $(\mathbb{R}^4)^*$ queda determinada por las relaciones

$$\forall i, j \in [\![0, 3]\!] :\ \langle \mathbf{e}_i^* | \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \tag{2.2}$$

y en consecuencia vale la implicación siguiente:

$$\mathbf{y}^* = \sum_{i=0}^3 y_i \mathbf{e}_i^* \in (\mathbb{R}^4)^*\ ,\ \mathbf{x} = \sum_{j=0}^3 x_j \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^4 \implies \langle \mathbf{y}^* | \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=0}^3 y_i x_i. \tag{2.3}$$

Sea E^* la matriz cuyas columnas son los funcionales $\mathbf{e}_i^*$ de la base dual de E. Entonces, de acuerdo con (2.2), $E^* = (E^{-1})^T$. Por tanto, si $F = (\mathbf{f}_i)_{i=0}^3$ es otra base y L es la matriz de cambio de base según (2.1), se ha de tener

$$E^* = F^* (L^{-1})^T\ \ \&\ \ \left[\forall \mathbf{y}^* \in (\mathbb{R}^4)^* :\ \mathbf{v} = (L^{-1})^T \mathbf{y}\right]. \tag{2.4}$$

donde $\mathbf{y}$ es la cuarteta de componentes del funcional $\mathbf{y}^*$ respecto a la base dual E^* y $\mathbf{v}$ es la cuarteta de componentes de $\mathbf{y}^*$ respecto a F^*.

En resumen, si L es una transformación de Lorentz en el espacio-tiempo, entonces $(L^{-1})^T$ es la correspondiente transformación de Lorentz en el espacio dual.

Por ejemplo, sea $E = (\mathbf{e}_j)_{j=0}^3$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Vista como matriz, E coincide con la matriz identidad Id_4 de orden 4×4. La base dual $E^* = (\mathbf{e}_i^*)_{i=0}^3$ de $(\mathbb{R}^4)^*$ consiste de las funciones proyecciones:

$$\forall i \in [\![0, 3]\!] :\ \mathbf{e}_i^* : \mathbf{z} \mapsto \langle \mathbf{e}_i^* | \mathbf{z} \rangle = z_i.$$

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Para cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ la *derivada* $f'(\mathbf{x}) = (\partial_i f(\mathbf{x}))_{j=0}^3$ es un punto de $\mathbb{R}^4$. De hecho $f'(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^3 (\partial_j f(\mathbf{x}))\ \mathbf{e}_j$. La *diferencial* $df(\mathbf{x})$ de f en $\mathbf{x}$ es la transformación lineal cuya matriz es la derivada $f'(\mathbf{x})$:

$$df(\mathbf{x}) : \mathbf{z} \mapsto df(\mathbf{x})(\mathbf{z}) = f'(\mathbf{x})^T \mathbf{z} = \sum_{i=0}^3 (\partial_i f(\mathbf{x})) z_i,$$

es una funcional lineal, vale decir, es un elemento del dual $(\mathbb{R}^4)^*$. Así pues, $df(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^3 (\partial_i f(\mathbf{x}))\ \mathbf{e}_i^* \in (\mathbb{R}^4)^*$. Sea $L \in \mathcal{L}$ una transformación de Lorentz invertible y sea $F = L^{-1}$. La matriz F determina pues una base de $\mathbb{R}^4$ y el cambio de base está dado por la relación (2.1). La base dual E^* es también la canónica y la dual de F es $F^* = L^T$ (según (2.4)) y así, la diferencial se representa respecto a ésta mediante la cuarteta $(L^{-1})^T f'(\mathbf{x})$.

1.3 Tensores

Sean $k, \ell \in \mathbb{Z}^+$ dos enteros positivos. Una (k,ℓ)-*forma multilineal* es una transformación

$$T : ((\mathbb{R}^4)^*)^k \times (\mathbb{R}^4)^\ell \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $i \in [\![0, k+\ell-1]\!]$, fijos los $k+\ell-1$ argumentos $\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_{i+1}, \ldots, \mathbf{z}_{k+\ell-1}$, la aplicación seccional $\mathbf{z}_i \mapsto T(\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}, \ldots, \mathbf{z}_{k+\ell-1})$ es lineal.

Una (k,ℓ)-forma multilineal se dice ser también un (k,ℓ)-*tensor* y la pareja (k,ℓ) el *orden* del tensor.

De manera natural, un escalar se identifica con un $(0,0)$-tensor, $r : \text{nil} \mapsto r$, un vector en $\mathbb{R}^4$ con un $(1,0)$-tensor, $\mathbf{x} : \mathbf{y}^* \mapsto \langle \mathbf{y}^* | \mathbf{x} \rangle$, y una funcional lineal con un $(0,1)$-tensor, $\mathbf{y}^* : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{y}^* | \mathbf{x} \rangle$.

Sea $\mathcal{T}^{(k,\ell)}$ la colección de (k,ℓ)-tensores. Evidentemente, $\mathcal{T}^{(k,\ell)}$ es un espacio vectorial real.

Para dos tensores cualesquiera T, S, de órdenes respectivos (k_0, ℓ_0), (k_1, ℓ_1), su *producto tensorial* $T \otimes S$ es el $(k_0 + k_1, \ell_0 + \ell_1)$-tensor

$$\begin{array}{rl} T \otimes S : (\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_{k_0-1}^*, \mathbf{y}_{k_0}^*, \ldots, \mathbf{y}_{k_0+k_1-1}^*; \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_0-1}, \mathbf{x}_{\ell_0}, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_0+\ell_1-1}) & \mapsto \\ T(\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_{k_0-1}^*; \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_0-1})\, S(\mathbf{y}_{k_0}^*, \ldots, \mathbf{y}_{k_0+k_1-1}^*; \mathbf{x}_{\ell_0}, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_0+\ell_1-1}) & . \end{array}$$

Se ve entonces que una base de $\mathcal{T}^{(k,\ell)}$ está constituída por los (k,ℓ)-tensores

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j};\mathbf{i}} = \mathbf{e}_{j_0} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_{k-1}} \otimes \mathbf{e}_{i_0}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_{\ell-1}}^*,$$

con $(\mathbf{j};\mathbf{i}) \in [\![0,3]\!]^k \times [\![0,3]\!]^\ell$, por lo que la dimensión de $\mathcal{T}^{(k,\ell)}$ es $4^{k+\ell}$. De hecho para todo $T \in \mathcal{T}^{(k,\ell)}$:

$$T = \sum_{\mathbf{j};\mathbf{i}} T(\mathbf{e}_{j_0}^*, \ldots, \mathbf{e}_{j_{k-1}}^*; \mathbf{e}_{i_0}, \ldots, \mathbf{e}_{i_{\ell-1}})\ \mathbf{e}_{\mathbf{j};\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{j};\mathbf{i}} T_{\mathbf{j};\mathbf{i}}\ \mathbf{e}_{\mathbf{j};\mathbf{i}}, \tag{3.1}$$

y de esta expresión puede verse que vale también

$$T(\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}^*; \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{\ell-1}) = \sum_{\mathbf{j};\mathbf{i}} T_{\mathbf{j};\mathbf{i}}\ y_{j_0,0} \cdots y_{j_{k-1},(k-1)}\ x_{i_0,0} \cdots x_{i_{\ell-1},(\ell-1)} \tag{3.2}$$

Los coeficientes $T_{\mathbf{j};\mathbf{i}}$ son las *componentes* de la (k,ℓ)-forma multilineal T respecto a la base $(\mathbf{e}_{\mathbf{j};\mathbf{i}})_{\mathbf{j};\mathbf{i}}$. De manera puramente ideal, el (k,ℓ)-tensor T puede ser visto como la matriz, de dimensión $(k+\ell)$, $(T_{\mathbf{j};\mathbf{i}})_{\mathbf{j};\mathbf{i}}$.

Si L es una transformación de Lorentz y $F = L^{-1}$ es la nueva base determinada por el cambio L, entonces las componentes de T respecto a la base F son

$$\tilde{T}_{\mathbf{j}';\mathbf{i}'} = \sum_{\mathbf{j};\mathbf{i}} \ell_{j_0 j_0'}^* \cdots \ell_{j_{\ell-1} j_{\ell-1}'}^*\ \ell_{i_0 i_0'} \cdots \ell_{i_{\ell-1} i_{\ell-1}'}\ T_{\mathbf{j};\mathbf{i}} \tag{3.3}$$

donde $L = [\ell_{ij}]_{i,j \in [\![0,3]\!]}$ y $(L^{-1})^T = \left[\ell_{ij}^*\right]_{i,j \in [\![0,3]\!]}$.

Evidentemente, si $\ell_1 \leq \ell$ y $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_1-1} \in \mathbb{R}^4$ están fijos entonces la forma seccional

$$(\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}^*; \mathbf{x}_{\ell_1-1}, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_0-1}) \mapsto T(\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}^*; \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{\ell-1})$$

es un $(k, \ell-\ell_1)$-tensor. Similarmente, si $k_1 \leq k$ e $\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_{k_1-1}^* \in (\mathbb{R}^4)^*$ están fijos entonces la forma seccional

$$(\mathbf{y}_{k_1}^*, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}^*; \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{\ell-1}) \mapsto T(\mathbf{y}_0^*, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}^*; \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{\ell-1})$$

es un $(k-k_1, \ell)$-tensor.

Como ejemplos de tensores están los siguientes:

Productos escalares Todo $(0,2)$-tensor se dice ser un *producto escalar* y, respecto a una base fija, queda determinado por una matriz $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Norma de Minkowski Naturalmente, la matriz $M = \mathrm{diag}[1\ \ 1\ \ 1\ \ -1]$ definida por (1.1) es un producto escalar.

Inversa de Minkowski La matriz M^{-1}, que de hecho coincide con M, determina un $(2,0)$-tensor, llamado *inverso* de M.

Producto interno Un $(1,1)$-tensor queda determinado por la matriz identidad $\mathrm{Id}_4 = \mathrm{diag}[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$: $(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}) \mapsto \sum_{i=0}^{3} y_i x_i$, es el *producto interno* usual, con el Teorema de Representación de Riesz de por medio.

Tensor de Levi-Civitá Sea $\mathrm{LC} = [\varepsilon_{ijk\ell}]_{i,j,k,\ell\in[\![0,3]\!]} \in \mathbb{R}^{4\times4\times4\times4}$, donde $\varepsilon_{ijk\ell} = 0$ si algunos dos de los índices i, j, k, ℓ coinciden o bien es el signo de la permutación $ijk\ell$ en otro caso. Entonces LC determina un $(0,4)$-tensor, llamado *de Levi-Civitá*.

De manera más general para una lista de k-índices $\mathbf{i} = (i_0, \ldots, i_{k-1})$ sea $\varepsilon_{\mathbf{i}} = 0$ si $\mathbf{i}$ no es una permutación y sea $\varepsilon_{\mathbf{i}} = \mathrm{sgn}(\mathbf{i})$ en otro caso; y para una pareja de listas de índices $(\mathbf{j};\mathbf{i}) \in [\![0,3]\!]^{k+\ell}$ sea $\varepsilon_{\mathbf{j};\mathbf{i}} = \varepsilon_{\mathbf{j}}\varepsilon_{\mathbf{i}}$. Entonces $\mathrm{LC}_{k\ell} = [\varepsilon_{\mathbf{j};\mathbf{i}}]_{(\mathbf{j};\mathbf{i})\in[\![0,3]\!]^{k+\ell}}$ determina un (k,ℓ)-tensor, llamado también *de Levi-Civitá*.

Intensidad de campo electromagnético Para 6 valores reales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ sea

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta_3 & -\beta_2 & \varepsilon_1 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 & \varepsilon_2 \\ \beta_2 & -\beta_1 & 0 & \varepsilon_3 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

F es una matriz antisimétrica y define un $(0,4)$-tensor.

Un operador que actúa sobre tensores es el siguiente.

Contracción $\mathcal{T}^{(k,\ell)} \to \mathcal{T}^{(k-1,\ell-1)}$. Sean $k_1 < k$ y $\ell_1 < \ell$. Para $\mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^{k-1}$ y $j \in [\![0,3]\!]$ sea $\phi_{k_1}(\mathbf{j}, j) \in [\![0,3]\!]^k$ el arreglo que se obtiene de insertar j en la posición k_1 dentro de $\mathbf{j}$. Fija una base de $\mathbb{R}^4$, para un (k,ℓ)-tensor $T \in \mathcal{T}^{(k,\ell)}$, al representarlo como $T = (T_{\mathbf{j};\mathbf{i}})_{(\mathbf{j};\mathbf{i})\in[\![0,3]\!]^k\times[\![0,3]\!]^\ell}$ se define

$$\forall(\mathbf{j};\mathbf{i}) \in [\![0,3]\!]^{k-1} \times [\![0,3]\!]^{\ell-1} :\ S_{\mathbf{j};\mathbf{i}} = \sum_{\iota=0}^{4} T_{\phi_{k_1}(\mathbf{j},\iota);\phi_{\ell_1}(\mathbf{i},\iota)}. \tag{3.4}$$

$S = \Phi_{k_1\ell_1}(T)$ es la *contracción* de T respecto a los índices $k_1\ell_1$.

Sea $T \in \mathcal{T}^{(k,\ell)}$ un (k,ℓ)-tensor y sean k_0, k_1 dos índices distintos en el intervalo $[\![0, k-1]\!]$. Para $\mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^{k-2}$ y $j_0, j_1 \in [\![0,3]\!]$ sea $\phi_{k_0k_1}(\mathbf{j}, j_0, j_1) \in [\![0,3]\!]^k$ el arreglo que se obtiene de insertar j_0 y j_1 en las posiciones k_0 y k_1, respectivamente, dentro de $\mathbf{j}$.

T es *simétrico* respecto a k_0, k_1 si las entradas de T no cambian al intercambiar los índices en las posiciones k_0 y k_1:

$$\forall\mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^{k-2}, j_0, j_1 \in [\![0,3]\!], \mathbf{i} \in [\![0,3]\!]^\ell :\ T_{\phi_{k_0k_1}(\mathbf{j},j_0,j_1);\mathbf{i}} = T_{\phi_{k_0k_1}(\mathbf{j},j_1,j_0);\mathbf{i}}.$$

Similarmente, dados $\ell_0, \ell_1 \in [\![0, \ell-1]\!]$, T es *simétrico* respecto a ℓ_0, ℓ_1 si:

$$\forall\mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^k, \mathbf{i} \in [\![0,3]\!]^{\ell-2}, i_0, i_1 \in [\![0,3]\!] :\ T_{\mathbf{j};\phi_{\ell_0\ell_1}(\mathbf{i},i_0,i_1)} = T_{\mathbf{j};\phi_{\ell_0\ell_1}(\mathbf{i},i_1,i_0)}.$$

T es *antisimétrico*, o *alternante*, respecto a k_0, k_1 si las entradas de T cambian de signo al intercambiar los índices en las posiciones k_0 y k_1:

$$\forall\mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^{k-2}, j_0, j_1 \in [\![0,3]\!], \mathbf{i} \in [\![0,3]\!]^\ell :\ T_{\phi_{k_0k_1}(\mathbf{j},j_0,j_1);\mathbf{i}} = -T_{\phi_{k_0k_1}(\mathbf{j},j_1,j_0);\mathbf{i}}.$$

Similarmente, T es *alternante* respecto a ℓ_0, ℓ_1 si:

$$\forall \mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^k, \mathbf{i} \in [\![0,3]\!]^{\ell-2}, i_0, i_1 \in [\![0,3]\!] : \ T_{\mathbf{j};\phi_{\ell_0\ell_1}(\mathbf{i},i_0,i_1)} = -T_{\mathbf{j};\phi_{\ell_0\ell_1}(\mathbf{i},i_1,i_0)}.$$

T es *simétrico* (a secas) si es simétrico respecto a cualquier par de índices y es *alternante* si lo es respecto a cualquier par de índices.

M y su inversa, al estar dados por matrices diagonales, son simétricos. Los tensores de Levi-Cività y de intensidad de campo electromagnético son alternantes. El producto interno, al ser un $(1,1)$-tensor, es simétrico y alternante a la vez, por mera vacuidad.

Para un conjunto K de k_1 índices en $[\![0, k-1]\!]$, una k_1-ada $(j_0, \ldots, j_{k_1-1}) \in [\![0,3]\!]^{k_1}$ y una $(k-k_1)$-ada $\mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^{k-k_1}$ sea $\phi_K(\mathbf{j}; (j_0, \ldots, j_{k_1-1}))$ la k-ada obtenida al colocar (intercalar) cada índice j_r en la posición k_r dentro de $\mathbf{j}$.

Sea $T \in \mathcal{T}^{(k,\ell)}$ un (k,ℓ)-tensor arbitrario. La *simetrización* y la *antisimetrización* de T se definen haciendo para cada $\mathbf{j} \in [\![0,3]\!]^{k-k_1}$, $(j_0, \ldots, j_{k_1}) \in [\![0,3]\!]^{k_1}$ e $\mathbf{i} \in [\![0,3]\!]^{\ell}$:

$$\begin{aligned}
T^{\text{sim}}_{\phi_K(\mathbf{j};(j_0,\ldots,j_{k_1-1}));\mathbf{i}} &= \frac{1}{k_1!} \sum_{\sigma \in S_{k_1}} T_{\phi_K(\mathbf{j};(j_{\sigma(0)},\ldots,j_{\sigma(k_1-1)}));\mathbf{i}} \\
T^{\text{alt}}_{\phi_K(\mathbf{j};(j_0,\ldots,j_{k_1-1}));\mathbf{i}} &= \frac{1}{k_1!} \sum_{\sigma \in S_{k_1}} \text{Sgn}(\sigma)\ T_{\phi_K(\mathbf{j};(j_{\sigma(0)},\ldots,j_{\sigma(k_1-1)}));\mathbf{i}}
\end{aligned}$$

donde S_{k_1} es el grupo de permutaciones de k_1-índices. Se tiene pues que T^{sim} y T^{alt} son, respectivamente, simétrica y alternante respecto a parejas de índices en K. Procedimientos similares de simetrización y antisimetrización valen cuando se considera el segundo bloque de argumentos $\mathbf{i}$ y se deja fijo el primero $\mathbf{j}$.

1.4 Formas diferenciales

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ un entero positivo. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real de dimensión n. Los *tensores* en $\mathbb{R}^n$ se construyen como en la sección 1.3 sustituyendo $\mathbb{R}^4$ por $\mathbb{R}^n$ y las dimensiones 4 y 3 por n y $n-1$ respectivamente.

Una *k-forma diferencial* es un $(0,k)$-tensor alternante. Sea $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ la colección de k-formas diferenciales sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces puede verse que $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial real y una base de él es $(\mathbf{e}_I)_{I \in [\![0,n-1]\!]^{(k)}}$, donde

$$I = \{i_0, \ldots, i_{k-1}\} \implies \mathbf{e}_I = \mathbf{e}_{i_0} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_{k-1}}.$$

Por tanto $\dim\left(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\right) = \binom{n}{k}$.

Si T es una k-forma diferencial y S es una ℓ-forma diferencial entonces el *producto exterior* $T \wedge S$ es el antisimetrizador del producto tensorial $T \otimes S$ y es una $(k+\ell)$-forma diferencial.

Específicamente, si $I \in [\![0,n-1]\!]^{(k)}$ es un conjunto de k índices y $J \in [\![0,n-1]\!]^{(\ell)}$ es uno de ℓ, entonces definimos $\rho(I,J) = 0$ si $I \cap J = \emptyset$ o bien como el signo de la permutación $I * J$ en otro caso. Pues bien, si $T = \sum_{I \in [\![0,n-1]\!]^{(k)}} T_I \mathbf{e}_I$ y $S = \sum_{K \in [\![0,n-1]\!]^{(\ell)}} S_J \mathbf{e}_J$ entonces $T \wedge S = \sum_{K \in [\![0,n-1]\!]^{(k+\ell)}} U_K \mathbf{e}_K$ donde $U_K = \sum_{I \cup J = K} \rho(I,J) T_I S_J$. Resulta entonces:

$$T \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ S \in \Lambda^\ell(\mathbb{R}^n) \implies T \wedge S = (-1)^{k\ell} S \wedge T.$$

Un vector es propiamente una 1-forma diferencial. Por esto, las k-formas diferenciales se dicen ser k-vectores.

Viendo al operador "derivada" como un vector abstracto $[\partial_0\ \ldots\ \partial_{n-1}]^T$, dada una k-forma diferencial $T = \sum_{I \in [\![0,n-1]\!]^{(k)}} T_I \mathbf{e}_I$, su *derivada exterior* es la $(k+1)$-forma diferencial

$$\mathrm{d}T = \sum_{i \in [\![0,n-1]\!]} \sum_{I \in [\![0,n-1]\!]^{(k)}} \rho(\{i\}, I)\ \partial_i T_I \mathbf{e}_{I \cup \{i\}}. \tag{4.1}$$

Si las componentes T_I son de clase C^2, entonces cualesquiera que sean i, j, $\partial_i \partial_j T_I = \partial_j \partial_i T_I$ y, debido a la alternancia, se ha de tener $\mathrm{dd}T = 0$. Es decir, $\mathrm{d}^2 = 0$.

Una k-forma T se dice ser *cerrada* si $\mathrm{d}T = 0$ y *exacta* si existe una $(k-1)$-forma S tal que $T = \mathrm{d}S$. Como $\mathrm{d}^2 = 0$, toda forma exacta es cerrada. Sea $C^k(\mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de k-formas cerradas y sea $B^k(\mathbb{R}^n)$ el de k-formas exactas. El cociente $H^k(\mathbb{R}^n) = C^k(\mathbb{R}^n)/B^k(\mathbb{R}^n)$ se dice ser de la *k-ésima cohomología de Rham.*

El *operador "estrella" de Hodge* es una aplicación que transforma k-tensores en $(n-k)$-formas. Para un k-tensor T se define

$$\forall \mathbf{i} \in [\![0, n-1]\!]^{n-k} : \ S_{\mathbf{i}} = \frac{\mathrm{sgn}(M)}{k!} \sum_{\mathbf{j} \in [\![0,n-1]\!]^k} \varepsilon_{\mathbf{j};\mathbf{i}} T_{\mathbf{j}}$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{j};\mathbf{i}}$ es el símbolo de Levi-Civitá, y entonces se hace $(\star T) = (S_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in [\![0,n-1]\!]^{(n-k)}}$.

Si T es una k-forma diferencial y consideramos a $(\star T)$ como una $(n-k)$-forma diferencial se tiene

$$\forall I \in [\![0, n-1]\!]^{(n-k)} : \ (\star T)_I = \frac{\mathrm{sgn}(M)}{k!} \rho(I^c, I) T_{I^c}.$$

Se tiene que para toda k-forma diferencial T se cumple

$$\star \star T = (-1)^{k(n-k)} \mathrm{sgn}(\det M)\ T. \tag{4.2}$$

Si T y S son formas diferenciales de órdenes respectivos k y $n-k$, entonces $T \wedge S$ es una n-forma diferencial y, en consecuencia $\star(T \wedge S)$ es una 0-forma diferencial, o sea es una constante.

Para $n = 3$ la función $(T, S) \mapsto \star(T \wedge S)$ definida sobre las 1-formas diferenciales, es decir sobre los vectores, coincide propiamente con el *producto vectorial* o *cruz* de los vectores.

Ejemplo: Ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell. Sean $B, E, J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales *magnético*, *eléctrico*, y de *corriente*, respectivamente y sea $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el campo escalar de *densidad de carga*. Las *ecuaciones de Maxwell* son

$$\begin{array}{rclcrcl} \nabla \times B - \partial_t E & = & 4\pi J & \qquad & \nabla \times E + \partial_t B & = & 0 \\ \nabla \cdot E & = & 4\pi\rho & & \nabla \cdot B & = & 0 \end{array} \tag{4.3}$$

donde $\nabla = [\partial_x \ \ \partial_y \ \ \partial_z]^T$. Así, $\nabla\times$, $\nabla\cdot$ son los operadores *rotacional* y *divergencia* respectivamente. Como acordamos desde un principio usemos $(x_0, x_1, x_2) = (x, y, z)$ para nombrar a las coordenadas espaciales y $x_3 = t$ a la temporal.

Al hacer $F_i = [\varepsilon_{ijk}]_{j,k \in \{0,1,2\}}$ se tiene $\nabla \times B = \left[\nabla^T F_i B\right]_{i \in \{0,1,2\}}$. Ampliemos los vectores como

- $\nabla = [\partial_0 \ \ \partial_1 \ \ \partial_2 \ \ \partial_3]^T$,
- $B = [b_0 \ \ b_1 \ \ b_2 \ \ 0]^T$,
- $F = [\alpha_{ijk\ell}]_{i,j,k,\ell \in \{0,1,2,3\}}$, donde $\alpha_{ijk\ell} = \varepsilon_{ijk}$ si $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ y $\alpha_{ijk\ell} = 0$ en otro caso, por tanto $\nabla \times B$ se expresa como un tensor $(\nabla, B) \mapsto F(\nabla, B)$,
- $E = [e_0 \ \ e_1 \ \ e_2 \ \ 0]^T$,
- se tiene $\nabla^T[0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1] = \partial_t$ y $\nabla^T[1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0] = \partial_x + \partial_y + \partial_z$ es el operador divergencia $\nabla\cdot$,
- $J = [j_0 \ \ j_1 \ \ j_2 \ \ \rho]^T$,

y en consecuencia las dos ecuaciones a la izquierda de (4.3) se plantean como un sistema de la forma

$$\forall i \in [\![0, 3]\!] : \ G_i^{\mathrm{izq}}(\nabla; B, E) = 4\pi J_i \tag{4.4}$$

Similarmente las dos ecuaciones a la derecha de (4.3) como un sistema

$$\forall i \in [\![0, 3]\!] : \ G_i^{\mathrm{der}}(\nabla; B, E) = 0. \tag{4.5}$$

Ahora bien, el sistema (4.5) puede plantearse como una ecuación de la forma $\mathrm{d}G = 0$ para un cierto tensor G que, en consecuencia, ha de ser cerrado. En el espacio de Minkowski, todo tensor cerrado es exacto, por tanto, ha de existir un tensor H tal que $G = \mathrm{d}H$. El tensor H se llama *potencia vectorial*, en particular, su componente temporal es la *potencia escalar*.

Las ecuaciones (4.4) pueden ser planteadas de la forma $\mathrm{d}(\star G) = 4\pi(\star J)$.

Debido a (4.2), se tiene que las ecuaciones tensoriales son invariantes bajo las transformaciones $T \mapsto \star T$ y $\star T \mapsto -T$.

1.5 Longitudes

Sean G^-, G^0, G^+ las regiones temporal, lumínica y espacial, respectivamente, definidas por las relaciones (1.3), del espacio-tiempo $\mathbb{R}^4$.

Sea $\mathbf{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ la parametrización de una curva Γ de clase C^1. Sea $\mathbf{x}'$ la derivada de $\mathbf{x}$, es decir, el vector tangente a la curva $\mathbf{x}$ en cada punto. Se define el *elemento de línea*:

$$ds: t\mapsto ds(t) = \begin{cases} \sqrt{-(\mathbf{x}'(t))^T G\mathbf{x}'(t)} & \text{si } \mathbf{x}'(t)\in G^-, \\ \sqrt{(\mathbf{x}'(t))^T G\mathbf{x}'(t)} & \text{si } \mathbf{x}'(t)\in G^0\cup G^+. \end{cases}$$

Si la curva $\mathbf{x}$ está en la region temporal G^-, su *tiempo propio* es $T(t,t_0)=\int_{t_0}^t ds(\tau)\,d\tau\in\mathbb{R}$, y si está en la lumínica o espacial, su *longitud* es $S(t,t_0)=\int_{t_0}^t ds(\tau)\,d\tau\in\mathbb{R}$.

Supongamos en lo sucesivo que $\mathbf{x}$ es una curva en la region temporal G^- y que, fijo $t_0\in\mathbb{R}$ la función $t\mapsto T(t,t_0)$ es inyectiva. Sea $\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ su función inversa: $[u=T(t,t_0)\Rightarrow\tau(u)=t]$ y $T(\tau(u),t_0)=u$. Por la Regla de la Cadena:

$$\frac{d\tau}{du}(u)=\left(\frac{dT}{dt}(t)\right)^{-1}=\left(\sqrt{-(\mathbf{x}'(t))^T G\mathbf{x}'(t)}\right)^{-1}, \text{ con } t=\tau(u).$$

En consecuencia, también por la Regla de la Cadena:

$$\frac{d(\mathbf{x}\circ\tau)}{du}(u)=\mathbf{x}'(\tau(u))\frac{d\tau}{du}(u)=\frac{1}{\sqrt{-(\mathbf{x}'(t))^T G\mathbf{x}'(t)}}\mathbf{x}'(t). \tag{5.1}$$

El vector $\mathbf{u}(u)=\frac{d(\mathbf{x}\circ\tau)}{du}(u)$ se dice ser la *velocidad tangencial* de una partícula que se mueve con posición $\mathbf{x}(t)$. Por (5.1) resulta

$$(\mathbf{u}(u))^T G\mathbf{u}(u)=-1, \tag{5.2}$$

así que *la velocidad tangencial está propiamente normalizada.*

Si la partícula en movimiento tiene masa m, entonces el *vector energía-momento* es $\mathbf{p}=m\mathbf{u}$ (omitimos aquí el argumento u), donde la *energía* es propiamente la coordenada temporal, y por tanto $e=m1^2$, que corresponde a la famosa ecuación de Einstein $e=mc^2$, pues hemos considerado $c=1$ en este contexto. En una situación en reposo, la velocidad tangencial es $\mathbf{u}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$. Supongamos que la curva $\mathbf{x}$ es el eje z, parametrizada a una velocidad v. Aplicando una transformación de Lorentz L_v, que sea una rotación espacio-temporal de la forma (1.5), se ha de tener

$$L_v\mathbf{p}=[0\ \ 0\ \ s(v)\,vm\ \ s(v)\,m]^T, \qquad \text{con } s(v)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ahora

$$\frac{ds}{dv}(v)=\frac{1}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2s}{dv^2}(v)=\frac{1+2v^2}{(1-v^2)^{\frac{5}{2}}},$$

por tanto, para velocidades pequeñas, alrededor de $v=0$, el desarrollo de Taylor hasta segundo orden es $s(v)=1+\frac{1}{2}v^2+o(v^2)$, y en consecuencia la energía en el marco transformado es $e\approx m+\frac{1}{2}v^2m$, o sea la suma de la energía en reposo más la energía cinética.

En la mecánica de Newton, se tiene $\mathbf{f}=m\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$. El análogo relativista es

$$\mathbf{f}=m\frac{d^2(\mathbf{x}\circ\tau)}{du^2}=\frac{d\mathbf{p}}{du}(u),$$

o sea, la fuerza (propiamente la gravedad) es una distorsión del espacio-tiempo.

Considerando campos electromagnéticos, la fuerza queda dada por una expresión $\mathbf{f}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, donde q es la carga de la partícula sujeta a los campos. De manera similar a como se hizo al final de la sección anterior se puede obtener una expresión $\mathbf{f}=[qF_i\mathbf{u}]_i$, donde cada F_i es un tensor.

1.6 Variedades diferenciables

Sea M un espacio topológico separado. Un *mapa* es una pareja (U,ϕ) donde $U\subset M$ es un conjunto abierto no-vacío y $\phi:U\to\mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo $U\to\phi(U)\subset\mathbb{R}^n$, del cual se dice que determina un *sistemas de coordenadas* en U. Un *atlas* es una colección de mapas $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ con las propiededes siguientes:

- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un recubrimiento de M: $M\subset\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$.
- Los mapas son *compatibles* en intersecciones:

$$\forall\alpha,\beta\in A:\ \left[U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset\implies \phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}:\phi_\beta\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\to\phi_\alpha\left(U_\alpha\cap U_\beta\right)\ \text{es un homeomorfismo}\right].$$

Si los homomorfismos son de clase C^k, el atlas se dice *de clase* C^k.

La pareja $(M,\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U}$ es un atlas maximal de clase C^k se dice ser una C^k*-variedad (diferenciable de orden k)*, de dimensión n.

Aunque los mapas determinan inclusiones locales en $\mathbb{R}^n$, se tiene:

Teorema 1.6.1 (de inmersión (Whitney)) *Toda C^k-variedad de dimensión n se puede incluir (contínuamente) en $\mathbb{R}^{2n}$.*

Como ejemplos de variedades están las siguientes:

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una C^∞-variedad de dimensión n.

Esfera $S^n=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}|\ \|\mathbf{x}\|=1\}$ (los hemisferios determinan mapas, o bien las proyecciones estereográficas suprimiendo "polos").

Toro $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (los mapas son relativos a la topología cociente).

Superficies de Riemann de diverso género Así como el toro bidimensional T^2 tiene un hoyo (es una dona) una *superficie de Riemann de género* g es una superficie con g hoyos.

Grupos de Lie Sea $U(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ el grupo de automorfismos lineales $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Entonces $U(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ es un espacio topológico, de hecho metrizable con la *norma espectral*, por ejemplo, y es además un grupo. Un *grupo de Lie* es un grupo topológico dotado de una estructura de variedad.

Productos de variedades Si M_0 y M_1 son variedades, su producto $M_0\times M_1$ puede ser dotado de una estructura de variedad.

Una función $f:M\to\mathbb{R}$ es *de clase* C^k si para cada punto $p\in M$ y mapa (U,ϕ) que contenga a p, se tiene que $f\circ\phi^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es de clase C^k en una vecindad abierta de $\phi^{-1}(p)$. Sea $C^k(M)$ la colección de funciones $M\to\mathbb{R}$ de clase C^k. Claramente, $C^k(M)$ es un espacio vectorial real.

En cada punto $p\in M$, supongamos que $\gamma:\mathbb{R}\to M$ es una curva en M tal que pasa por p, digamos $\gamma(t_0)=p$. Consideremos la transformación $\partial_\gamma\cdot(p):C^k(M)\to\mathbb{R}$ definida como

$$f\mapsto\partial_\gamma f\ (p)=D(f\circ\phi^{-1})(\phi(p))\left(\frac{d(\phi\circ\gamma)}{dt}(t_0)\right).\tag{6.1}$$

Puede verse que $\partial_\gamma\cdot(p)$ es independiente de ϕ y es lineal sobre $C^k(M)$, así pues, es un funcional lineal y es un elemento del espacio dual $C^k(M)^\star$. Esta transformación es la *derivada direccional en p según la curva γ*. Sea $T_p\subset C^k(M)^\star$ la colección de derivadas direccionales sobre curvas que pasen por $p\in M$. La familia T_p es un espacio vectorial real y se llama *espacio tangente* a M en $p\in M$.

Escribiendo $\phi=(x_0,\ldots,x_{n-1})$, usando la regla de la cadena, se tiene de la expresión (6.1):

$$\partial_\gamma f\ (p)=\sum_{j=0}^{n-1}\partial_{x_j}(f\circ\phi^{-1})(\phi(p))\ (\phi\circ\gamma)'(t_0)=\sum_{j=0}^{n-1}\partial_\gamma x_j(p)\ \partial_{x_j}f(p)\tag{6.2}$$

así pues, la derivada direccional en p se expresa como una combinación lineal de las *derivadas parciales* $\left(\partial_{x_j} f(p)\right)_{j=0}^{n-1}$. Se tiene pues que la colección de funcionales $\left(\partial_{x_j}\cdot(p)\right)_{j=0}^{n-1}$ es una base de T_p, llamada *de coordenadas*, y por tanto T_p es de dimensión n.

Ahora bien, si se cambia de coordenadas en el mapa, digamos a $\psi=(y_0,\ldots,y_{n-1})$, entonces por (6.2):

$$\forall i\in[\![0,n-1]\!]:\ \partial_{y_i} f(p)=\sum_{j=0}^{n-1}\partial_{y_i}x_j(p)\ \partial_{x_j} f(p).$$

En consecuencia para todo $f^\star\in T_p$: $\sum_{i=0}^{n-1} b_i\ \partial_{y_i}\cdot(p)=f^\star=\sum_{j=0}^{n-1} a_j\ \partial_{x_j}\cdot(p)$ si y sólo si:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} b_i\ \partial_{y_i}\cdot(p) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i\ \sum_{j=0}^{n-1}\partial_{y_i}x_j(p)\ \partial_{x_j}\cdot(p)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i\partial_{y_i}x_j(p)\right)\ \partial_{x_j}\cdot(p)\end{aligned}$$

Se ha de tener entonces $\mathbf{a}=J_p\mathbf{b}$, donde $J_p=[\partial_{y_i}x_j(p)]_{0\leq i,j\leq n-1}$ es la llamada *matriz jacobiana* del cambio del sistema de coordenadas. Por el Teorema de la Función Inversa:

$$\mathbf{b}=J_p^{-1}\mathbf{a}\quad\text{donde}\quad J_p^{-1}=\left[\partial_{x_j}y_i(p)\right]_{0\leq i,j\leq n-1}\tag{6.3}$$

El *espacio cotangente en el punto* $p\in M$ es el dual $T_p^\star$ del espacio tangente T_p.

Por ejemplo, si $f\in C^k(M)$ es una función, el funcional

$$\mathrm{d}f:\partial_\gamma\cdot(p)\mapsto \mathrm{d}f(\partial_\gamma\cdot(p))=\partial_\gamma f(p)$$

es un elemento del espacio cotangente $T_p^\star$. $\mathrm{d}f$ se dice ser el *gradiente* de f en p.

Si $(U,\phi=(x_0,\ldots,x_{n-1}))$ es un mapa en p, entonces

$$\forall i,j\in[\![0,n-1]\!]:\ \mathrm{d}x_i(\partial_{x_j}\cdot(p))=\partial_{x_j}x_i(p)=\delta_{ij},$$

por tanto $(\mathrm{d}x_i)_{i=0}^{n-1}$ es la base de $T_p^\star$ dual de la base de coordenadas $\left(\partial_{x_j}\cdot(p)\right)_{j=0}^{n-1}$ de T_p.

Los vectores tangentes son $(0,1)$-tensores y los funcionales son $(1,0)$-tensores. En general el espacio de los (k,ℓ)-tensores tiene como base

$$\left\{\partial_{x_{j_0}}\otimes\cdots\otimes\partial_{x_{j_{k-1}}}\ \otimes\ \mathrm{d}x_{i_0}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x_{i_{\ell-1}}\right\}_{\mathbf{j}\in[\![0,n-1]\!]^k,\mathbf{i}\in[\![0,n-1]\!]^\ell}.$$

Por tanto, todo (k,ℓ)-tensor puede escribirse de la forma

$$T=\sum_{\mathbf{j}\in[\![0,n-1]\!]^k,\mathbf{i}\in[\![0,n-1]\!]^\ell} T_{\mathbf{j},\mathbf{i}}\ \partial_{x_{j_0}}\otimes\cdots\otimes\partial_{x_{j_{k-1}}}\ \otimes\ \mathrm{d}x_{i_0}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x_{i_{\ell-1}}.$$

Si se cambia de coordenadas en el mapa, digamos a $\psi=(y_0,\ldots,y_{n-1})$, entonces respecto a las bases $\left(\partial_{x_j}\cdot(p)\right)_{j=0}^{n-1}$, $\left(\partial_{y_j}\cdot(p)\right)_{j=0}^{n-1}$ y a sus duales $(\mathrm{d}x_i)_{i=0}^{n-1}$, $(\mathrm{d}y_i)_{i=0}^{n-1}$, el cambio de coordenadas del (k,ℓ)-tensor se hace según (6.3), (2.1), (2.4) y (3.3).

Sea $G=[g_{ij}]_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$ una matriz simétrica no-singular. G determina un $(0,2)$-tensor

$$T_G=\sum_{i,j=0}^{n-1} g_{ij}\ \mathrm{d}x_i\otimes\mathrm{d}x_j=(\mathrm{d}\phi)^T\,G\,\mathrm{d}\phi,\tag{6.4}$$

el cual se dice ser una *métrica*. La raíz cuadrada de éste es el *elemento de superficie*: $ds=\sqrt{|T_G|}$.

Si se tiene un nuevo sistema de coordenadas $\psi=(y_0,\ldots,y_{n-1})$ en un punto $p\in M$, de acuerdo con las fórmulas de cambio de variables,

$$T_G=(\mathrm{d}\psi)^T\,(J_p^{-1})^T G J_p^{-1}\,\mathrm{d}\psi.\tag{6.5}$$

Por ejemplo, para $n=3$, la matriz $G=\mathrm{Id}_3$ determina el elemento de superficie

$$ds=\sqrt{\mathrm{d}x_0\otimes\mathrm{d}x_0+\mathrm{d}x_1\otimes\mathrm{d}x_1+\mathrm{d}x_2\otimes\mathrm{d}x_2}.$$

Al hacer el cambio a coordenadas *esféricas*:

$$x_0=y_0\,\mathrm{sen}\,y_1\cos y_2\ \ ,\ \ x_2=y_0\,\mathrm{sen}\,y_1\,\mathrm{sen}\,y_2\ \ ,\ \ x_2=y_0\cos y_1$$

(y_0 es el *radio*, y_1 es el *ángulo cenital* e y_2 es el *ángulo azimutal*), se tiene que el elemento de superficie se expresa como

$$ds=\sqrt{\mathrm{d}y_0\otimes\mathrm{d}y_0+y_0^2\,\mathrm{d}y_1\otimes\mathrm{d}y_1+y_0^2(\,\mathrm{sen}\,y_1)^2\,\mathrm{d}y_2\otimes\mathrm{d}y_2}.$$

Las matrices *semiunitarias* (reales) son aquellas con valores propios $+1,0,-1$. Al ser diagonalizadas adquieren la forma $G=\mathrm{diag}[+1\ \cdots\ +1\ -1\ \cdots\ -1\ 0\ \cdots\ 0]$ (llamada *forma canónica*). Si s es la multiplicidad de $+1$ y t la de -1, entonces $s-t$ es la *signatura* y $s+t$ el *rango* de G. Si $t=0$, G se dice ser *euclidiana* o *positiva*. La matriz es pues una métrica si su rango es n. Una métrica euclidiana es *positiva definida*. Si $t=1$ (es decir la multiplicidad de -1 es 1), la métrica se dice ser *lorentziana*. En relatividad, en particular en el *espacio-tiempo*, las métricas lorentzianas son de gran relevancia. $(\mathbb{R}^n,G)$, donde G es una métrica euclidiana, se dice ser el *espacio plano*. $(\mathbb{R}^n,G)$, donde G es una métrica lorentziana, se dice ser un *espacio curvo*.

Sea M una C^k-variedad diferenciable de dimensión n. Sea $G:M\to\mathbb{R}^{n\times n}$ un campo que a cada punto $p\in M$ le asocia una métrica en el espacio tangente T_p. Puede verse que en cada punto $p\in M$ existe un sistema de coordenadas $\phi_p=(x_0,\dots,x_{n-1})$ tal que $G(p)$ queda en forma canónica, las primeras derivadas $\partial_\ell g_{ij}(p)$ se anulan todas pero las segundas derivadas $\partial_{\ell_0,\ell_1}g_{ij}(p)$ no se anulan todas. Tal sistema ϕ_p se dice ser un *sistema riemanniano normal* o bien un *marco local lorentziano.* La existencia de sistemas riemannianos normales se prueba considerando las fórmulas de cambios de base, expansiones de Taylor y cambios de orientación mediante el tensor de Levi-Civitá [2].

Precisamente al considerar el tensor de Levi-Civitá $(\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in[\![0,n-1]\!]^n}$ ($\varepsilon_{\mathbf{i}}=\mathrm{sgn}(\mathbf{i})$ si $\mathbf{i}$ es una permutación y $\varepsilon_{\mathbf{i}}=0$ en otro caso) se tiene que cualquiera que sea la matriz $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\forall\mathbf{i}\in[\![0,n-1]\!]^n:\quad \varepsilon_{\mathbf{i}}\det(A)=\sum_{\mathbf{j}\in S_n}\varepsilon_{\mathbf{j}}\prod_{k=0}^{n-1}a_{i_kj_k}.$$

En particular, si se tiene un nuevo sistema de coordenadas $\psi=(y_0,\dots,y_{n-1})$ en un punto $p\in M$ se tiene

$$\forall\mathbf{i}\in[\![0,n-1]\!]^n:\quad \varepsilon_{\mathbf{i}}\det(J_p)=\sum_{\mathbf{j}\in S_n}\varepsilon_{\mathbf{j}}\prod_{k=0}^{n-1}\partial_{y_{i_k}}x_{j_k}.$$

Por tanto

$$\forall\mathbf{i}\in[\![0,n-1]\!]^n:\quad \varepsilon_{\mathbf{i}}=(\det(J_p))^{-1}\sum_{\mathbf{j}\in S_n}\varepsilon_{\mathbf{j}}\prod_{k=0}^{n-1}\partial_{y_{i_k}}x_{j_k}=\det(J_p^{-1})\sum_{\mathbf{j}\in S_n}\varepsilon_{\mathbf{j}}\prod_{k=0}^{n-1}\partial_{y_{i_k}}x_{j_k},\tag{6.6}$$

es decir, el tensor de Levi-Civitá se afecta por un factor $(\det(J_p))^{-1}$ con el cambio de base.

Ahora bien, si G es una métrica, de acuerdo con la relación (6.5), se tiene

$$\det G'=\det\left((J_p^{-1})^TGJ_p^{-1}\right)=(\det J_p)^{-2}\det G,$$

donde G' es la matriz que representa a la métrica respecto al nuevo sistema de coordenadas.

1.7 Derivadas covariantes

Sea $\mathcal{T}^{(k,\ell)}$ la colección de (k,ℓ)-tensores. La *derivada covariante* es una aplicación $\nabla:\mathcal{T}^{(k,\ell)}\to\mathcal{T}^{(k,\ell+1)}$ de manera que

sea aditiva $\nabla(T+S) = \nabla T + \nabla S$, y

cumpla la *regla de Leibniz* $\nabla(T\otimes S) = (\nabla T)\otimes S + T\otimes(\nabla S)$.

Por ejemplo, para $(k,\ell) = (0,1)$, los $(0,1)$-tensores son funcionales. Si $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\,\mathrm{d}x_i$ entonces:

$$\nabla(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{n-1} \nabla(u_i\,\mathrm{d}x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (\nabla u_i)\ \mathrm{d}x_i + \sum_{i=0}^{n-1} u_i\ \nabla(\mathrm{d}x_i). \tag{7.1}$$

Para cada $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\nabla(\mathrm{d}x_i)$ es un “bifuncional”. Expresémoslo como

$$\nabla(\mathrm{d}x_i) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{i,jk}\,\mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_k. \tag{7.2}$$

De hecho, de (7.2), para dos índices $j', k' \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathrm{d}x_i)(x_{j'}, x_{k'}) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{i,jk}\,\mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_k(x_{j'}, x_{k'}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{i,jk}\,\mathrm{d}x_j(x_{j'})\ \mathrm{d}x_k(x_{k'}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{i,jk}\,\delta_{jj'}\delta_{kk'} \\
&= c_{i,j'k'}.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\forall i,j,k \in [\![0, n-1]\!]: \quad c_{i,jk} = \nabla(\mathrm{d}x_i)(x_j, x_k), \tag{7.3}$$

y éstos se llaman *coeficientes de conexión* o *de Christoffel*. (En muchos textos se les suele denotar como $c_{i,jk} = \Gamma^i_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$.) Al $(1,2)$-tensor cuyas componentes son los coeficientes de Christoffel se le llama *de conexión*. Al sustituir (7.2) en (7.1), se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{u}) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\nabla u_i)\ \mathrm{d}x_i + \sum_{i=0}^{n-1} u_i \left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{i,jk}\,\mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_k \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} u_i\,\mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_i + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i c_{i,jk} \right) \mathrm{d}x_j \otimes \mathrm{d}x_k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} u_j\,\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij} \right) \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \left[u_j + \sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij} \right] \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j
\end{aligned}$$

(en la tercera igualdad hemos hecho varios renombramientos de índices). Por tanto, el $(0,2)$-tensor $\nabla(\mathbf{u})$ tiene como arreglo de componentes a

$$C_{(0,1)} = \left[u_j + \sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij} \right]_{0\le i,j\le n-1}. \tag{7.4}$$

Para cada $i \in [\![0, n-1]\!]$ definamos el $(0,1)$-tensor

$$\nabla_i(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\partial_{x_i} u_j + \sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij} \right] \mathrm{d}x_j. \tag{7.5}$$

De manera un poco más general, para $\ell \geq 1$ e $\mathbf{i} \in [\![0, n-1]\!]^\ell$ sea $\mathrm{d}x_{\mathbf{i}} = \mathrm{d}x_{i_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x_{i_{\ell-1}}$. Si se expresa

$$\nabla(\mathrm{d}x_{\mathbf{i}}) = \sum_{\mathbf{j}\in[\![0,n-1]\!]^\ell} \sum_{j_\ell=0}^{n-1} c_{\mathbf{i},\mathbf{j},j_\ell}\, \mathrm{d}x_{\mathbf{j}} \otimes \mathrm{d}x_{j_\ell}, \tag{7.6}$$

entonces para cualquier $T \in \mathcal{T}^{(0,\ell)}$ donde $T = \sum_{\mathbf{j}\in[\![0,n-1]\!]^\ell} u_{\mathbf{j}}\, \mathrm{d}x_{\mathbf{j}}$, el arreglo de componentes de ∇T es

$$C_{(0,\ell)} = \left[u_{\mathbf{j}} + \sum_{\mathbf{k}\in[\![0,n-1]\!]^\ell} u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\mathbf{j},j_\ell} \right]_{(\mathbf{j},j_\ell)\in[\![0,n-1]\!]^\ell\times[\![0,n-1]\!]}. \tag{7.7}$$

Para cada $\mathbf{i} \in [\![0, n-1]\!]^\ell$ definamos el $(0,1)$-tensor

$$\nabla_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\partial_{\mathbf{x_i}} u_{\mathbf{j}} + \sum_{\mathbf{k}\in[\![0,n-1]\!]^\ell} u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\mathbf{i}j} \right] \mathrm{d}x_j. \tag{7.8}$$

Supongamos ahora que $J_p = [\partial_{y_i} x_j(p)]_{0\leq i,j\leq n-1}$ es la matriz jacobiana de un cambio de coordenadas a $\psi = (y_0, \ldots, y_{n-1})$. Consideremos, para aligerar la notación, $\ell = 1$. De manera similar a (6.4), $\nabla(\mathbf{u}) = (\mathrm{d}\phi)^T C_{(0,1)} \mathrm{d}\phi$, y como en (6.5), $\nabla(\mathbf{u}) = (\mathrm{d}\psi)^T (J_p^{-1})^T C_{(0,1)} J_p^{-1} \mathrm{d}\psi$. Por tanto, necesariamente

$$C'_{(0,1)} = (J_p^{-1})^T C_{(0,1)} J_p^{-1}, \tag{7.9}$$

donde $C'_{(0,1)}$ es el arreglo de componentes de $\nabla(\mathbf{u})$ respecto al sistema de coordenadas ψ, lo cual concuerda también con la relación de cambio de variables (3.3). De manera equivalente, (7.9) se escribe,

$$\forall i', j' \in [\![0, n-1]\!]: \quad u'_{j'} + \sum_{k'=0}^{n-1} u'_{k'} c'_{k'i'j'} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \partial_{x'_i}(y_i) \left(u_j + \sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij} \right) \partial_{x_j}(y_{j'})$$

1.8 Transporte paralelo

Sea Γ una curva en una C^k-variedad M y sea $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una parametrización de Γ. Sea $\phi = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ un sistema de coordenadas en un mapa en M que contenga a la curva Γ. Entonces $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva en $\mathbb{R}^n$. Sea $T : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Esta función puede identificarse con $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $T = \tilde{T} \circ \phi$.

T es de *transporte paralelo* a Γ si sus curvas de nivel son paralelas a Γ. Es decir, si ocurre que $\partial_\Gamma T = 0$. Así pues, se ha de tener $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$0 = \partial_\Gamma T\,(\gamma(t)) = \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j \tilde{T}(\tilde{\gamma}(t))\, \frac{d\gamma_j}{dt}(t)$$

donde $\tilde{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$. La *derivada covariante* se define como el operador:

$$D_\Gamma = \sum_{j=0}^{n-1} D_\Gamma(\gamma_j)\, \nabla_j : T \mapsto D_\Gamma(T) \text{ donde } D_\Gamma(T) : t \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} \partial_j \tilde{T}(\tilde{\gamma}(t))\, \frac{d\gamma_j}{dt}(t).$$

En particular si $T \in \mathcal{T}^{(k,\ell)}$ es un (k,ℓ)-tensor, T es de *transporte paralelo* si

$$\forall \mathbf{j} \in [\![0, n-1]\!]^k, \mathbf{i} \in [\![0, n-1]\!]^\ell:\ 0 = (D_\Gamma(T))_{\mathbf{j};\mathbf{i}} = \sum_{i_\ell=0}^{n-1} \left(D_\Gamma(\gamma_{i_\ell})\, \nabla_{i_\ell} T\right)_{\mathbf{j};\mathbf{i}}. \tag{8.1}$$

Si $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\, \mathrm{d}x_i$ es un vector, la *ecuación de transporte paralelo* (8.1) queda, atendiendo (7.5):

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{n-1} D_\Gamma(\gamma_i)\, \nabla_i(u) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} D_\Gamma(\gamma_i) \sum_{j=0}^{n-1} \left[\partial_{x_i} u_j + \sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij}\right] \mathrm{d}x_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} D_\Gamma(\gamma_i)\, \partial_{x_i} u_j + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij} D_\Gamma(\gamma_i)\right] \mathrm{d}x_j
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!] : \ D_\Gamma(u_j)\ + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \sum_{i=0}^{n-1} c_{k,ij} D_\Gamma(\gamma_i) = 0. \tag{8.2}$$

Ahora, supongamos que la curva Γ sea *compatible* con el tensor de métrica $G = (g_{ij})_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$, es decir

$$0 = D_\Gamma(G) = \sum_{i=0}^{n-1} D_\Gamma(\gamma_i)\, \nabla_i G.$$

Entonces, si $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i\, \mathrm{d}x_i$ y $\mathbf{v} = \sum_{j=0}^{n-1} v_j\, \mathrm{d}x_j$ son dos vectores de transporte paralelo según Γ, se tiene

$$D_\Gamma(\mathbf{u}^T G\mathbf{v}) = (D_\Gamma(\mathbf{u}))^T\ G\mathbf{v} + \mathbf{u}^T\ (D_\Gamma(G))\,\mathbf{v} + \mathbf{u}^T G\,(D_\Gamma(\mathbf{v})) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

o sea, el *producto escalar* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}^T G\mathbf{v}$ (y cualquier otra noción geométrica asociada a él) es de transporte paralelo a Γ.

Supongamos ahora que $\mathbf{u} : \Gamma \to \bigcup_{p\in\Gamma} T_p$ es un campo de vectores que satisfagan la ecuación de transporte paralelo (8.2). Supongamos asímismo que fijo $t_0 \in \mathbb{R}$ existe un campo de matrices $P_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{u}(t) = P_{t_0}(t)\, \mathbf{u}(t_0) \tag{8.3}$$

por lo que el campo P_{t_0} se llama *propagador de paralelismo*. Observando (8.2) definamos

$$\forall j, k \in [\![0, n-1]\!] : \ a_{jk}(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} c_{k,ij} D_\Gamma(\gamma_i)(\mathbf{u}(t)).$$

Entonces (8.2) se replantea como $(D_\Gamma(\mathbf{u}))(t) = A(t)\, \mathbf{u}(t)$. O sea

$$D_\Gamma(P_{t_0})(t) = A(t)\, P_{t_0}(t), \tag{8.4}$$

la cual se conoce como *ecuación de Dyson* y es similar a la *de onda de Schrödinger*. Equivalentemente

$$P_{t_0}(t) = \mathrm{Id}_n + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, P_{t_0}(\tau)\, d\tau. \tag{8.5}$$

La ecuación integral (8.5) tiene solución de la forma

$$P_{t_0}(t) = B(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(t)\, d\tau\right). \tag{8.6}$$

Así pues, (8.3) y (8.6) dan un vector de transporte paralelo a Γ.

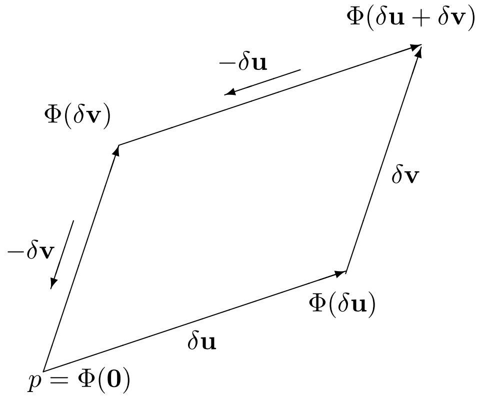

Figura 1.1: Transporte paralelo en un paralelogramo.

1.9 Geodésicas

Una línea recta en el espacio euclidiano es tal que cualquier vector tangente en ella se transporta de manera paralela en ella. Generalizando esta propiedad se define: Sea Γ una curva en una C^k-variedad M, con parametrización $\gamma : \mathbb{R} \to M$. Se dice que γ es una *geodésica* si su vector tangente a Γ, o sea su derivada covariante respecto a Γ, satisface la ecuación de transporte paralelo (8.2), que renombrando índices queda:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] : \ D^2_\Gamma(\gamma_k) + \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{i,jk} D_\Gamma(\gamma_i) D_\Gamma(\gamma_j) = 0. \tag{9.1}$$

llamada ésta la *ecuación geodésica.* Puede verse que si γ es una geodésica, lo será también cualquier parametrización de la forma $t \mapsto \gamma(at+b)$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$.

Las geodésicas pueden ser utilizadas para poner en correspondencia al espacio tangente T_p en un punto $p \in M$ con una vecindad de p. En efecto, dado $\mathbf{u} \in T_p$ sea $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una solución de la ecuación geodésica (9.1) que cumpla con la condición inicial $D_\Gamma(\gamma)(0) = \mathbf{u}$. Entonces se define $\Phi(\mathbf{u}) = \gamma(1)$. La aplicación $\Phi : T_p \to M$ está bien definida y realiza a $\mathrm{dom}(\Phi)$ como una vecindad $\Phi(\mathrm{dom}(\Phi))$ de p. Los puntos en T_p que no estén en $\mathrm{dom}(\Phi)$ son *singularidades.*

De manera similar a la ecuación geodésica (9.1), un *vector de Killing* es un elemento $\mathbf{v}$ tal que

$$\sum_{i,j\in[\![0,n-1]\!]} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = 0.$$

Para un tal vector, a lo largo de una geodésica γ se ha de tener que $\langle D_\Gamma(\gamma)|\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} D_\Gamma(\gamma_i)v_i$ es constante.

1.10 Curvatura

Sea M una C^k-variedad y sea $p \in M$ un punto en ella. Sea Φ la aplicación descrita al final de la sección anterior que identifica al espacio tangente T_p con una vecindad de p. Dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p$, consideremos el "paralelogramo" con aristas paralelas a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, cuyas longitudes están dadas por una razón δ, y hagamos que un vector $\mathbf{z}$ se transporte de manera paralela a lo largo de su perímetro en un sentido antihorario (véase la figura 1.1)

Cuando $\delta \to 0$, la posición final del vector $\mathbf{z}$ se puede poner como un vector, es decir un $(1,0)$-tensor, cuyas componentes son propiamente $(0,3)$-tensores, es decir

$$\mathbf{z}_{\text{fin}} = \overline{R}(\mathbf{z}, d\mathbf{u}, d\mathbf{v}) = \sum_{i,j,k,\ell\in[\![0,n-1]\!]} r_{i,jk\ell}\, z_j\, du_k\, dv_\ell\, dx_i. \tag{10.1}$$

Como el transporte es paralelo debe satisfacerse la ecuación de transporte paralelo (8.2), y por tanto

$$\forall i,j,k,\ell \in [\![0, n-1]\!] : \quad r_{i,jk\ell} = \nabla_k c_{j,\ell i} - \nabla_\ell c_{j,ki} + \sum_{j_1=0}^{n-1} \left[c_{j_1,ki} c_{j,\ell j_1} - c_{j_1,\ell i} c_{j,kj_1}\right]. \tag{10.2}$$

El $(1,3)$-tensor $(\phi;\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})\mapsto R(\phi;\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v})$ cuyas componentes están dadas por (10.2) se llama el *tensor de Riemann*. De (10.2) se ve inmediatamente que el tensor R es alternante respecto a sus dos últimos argumentos: $R(\phi;\mathbf{z},\mathbf{u},\mathbf{v}) = -R(\phi;\mathbf{z},\mathbf{v},\mathbf{u})$ (en la figura 1.1 se ve que intercambiar esos argumentos es equivalente a intercambiar el sentido del recorrido en el perímetro del paralelogramo). Si R es idénticamente cero, entonces la variedad M se dice ser *plana*.

El *tensor de torsión* es de orden $(2,1)$ y tiene como componentes

$$\forall i,j,k\in[\![0,n-1]\!]:\ \tau_{ij,k}=c_{i,jk}-c_{j,ik}. \tag{10.3}$$

Por otro lado, puede verse que las derivadas covariantes pueden dejar de ser conmutativas: $\nabla_k\nabla_\ell\neq\nabla_\ell\nabla_k$. De hecho, puede verse que el *conmutador* de tales derivadas está dado por el tensor de Riemann y el de torsión:

$$\forall\mathbf{u}\in T_p,\forall i,k,\ell:\quad(\nabla_k\nabla_\ell-\nabla_\ell\nabla_k)u_i=[\nabla_k,\nabla_\ell]u_i=\sum_{j=0}^{n-1}r_{i,jk\ell}u_j-\sum_{j_1=0}^{n-1}\tau_{k\ell,j_1}\nabla_{j_1}u_i. \tag{10.4}$$

El tensor de Riemann también puede presentarse como un $(0,4)$-tensor definiendo como nuevas componentes

$$\forall i,j,k,\ell\in[\![0,n-1]\!]:\ \overline{\overline{r}}_{ijk\ell}=\sum_{i_1=0}^{n-1}g_{ii_1}r_{i_1,jk\ell} \tag{10.5}$$

donde $G=(g_{ij})_{0\leq i,j\leq n-1}$ es el tensor que define la métrica. Puede verse que valen las siguientes relaciones de simetría y alternancia:

$$\forall i,j,k,\ell\in[\![0,n-1]\!]:\quad\begin{cases}\overline{\overline{r}}_{ijk\ell}=\overline{\overline{r}}_{k\ell ij}=-\overline{\overline{r}}_{ij\ell k}=-\overline{\overline{r}}_{jik\ell}\\ \overline{\overline{r}}_{ijk\ell}+\overline{\overline{r}}_{ik\ell j}+\overline{\overline{r}}_{i\ell jk}=0\end{cases} \tag{10.6}$$

Calculando las derivadas covariantes de las componentes del tensor de Riemann se comprueba que valen las *identidades de Bianchi*:

$$\forall i,j,k,\ell,m\in[\![0,n-1]\!]:\quad\nabla_m r_{i,jk\ell}+\nabla_k r_{i,j\ell m}+\nabla_\ell r_{i,jmk}=0 \tag{10.7}$$

(obsérvese que se aplica una rotación a los tres últimos índices k,ℓ,m). Las identidades de Bianchi son muy similares a las *identidades de Jacobi*:

$$[[\nabla_m,\nabla_k],\nabla_\ell]+[[\nabla_k,\nabla_\ell],\nabla_m]+[[\nabla_\ell,\nabla_m],\nabla_k]=0$$

donde $[\nabla_m,\nabla_k]=\nabla_m\,\nabla_k-\nabla_k\,\nabla_m$ es el conmutador de las derivadas covariantes.

El *tensor de Ricci* es el $(0,2)$-tensor con componentes

$$\forall j,\ell\in[\![0,n-1]\!]:\quad s_{j\ell}=\sum_{i=0}^{n-1}r_{i,ji\ell}. \tag{10.8}$$

Así pues, de acuerdo con la relación (3.4) el tensor de Ricci es la contracción del de Riemann respecto a los índices i y k. Por las relaciones de simetría y alternancia (10.6) se tiene

$$\forall j,\ell\in[\![0,n-1]\!]:\quad s_{j\ell}=s_{\ell j}.$$

Por las mismas relaciones (10.6), cualquier otra contracción del de Riemann o bien se anula o bien coincide con el tensor de Ricci salvo por un signo. Por tanto, el de Ricci es esencialmente la única contracción del de Riemann.

Si $G^{-1}=\left(\overline{g}_{ij}\right)_{0\leq i,j\leq n-1}$ es la inversa de la matriz G de componentes del tensor que define la métrica, entonces el *escalar de Ricci* es $s=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\overline{g}_{j\ell}s_{j\ell}$. La *curvatura* de la variedad está definida como este escalar.

Al realizar una doble contracción a las identidades de Bianchi (10.7) se tiene $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$:

$$0=\sum_{i,j,\ell,m\in[\![0,n-1]\!]}\overline{g}_{jm}\overline{g}_{i\ell}\left[\nabla_m r_{i,jk\ell}+\nabla_k r_{i,j\ell m}+\nabla_\ell r_{i,jmk}\right]=\sum_{i\in[\![0,n-1]\!]}\nabla_i s_{ik}-\nabla_k s+\sum_{j\in[\![0,n-1]\!]}\nabla_j s_{jk}$$

o sea

$$\sum_{i\in[\![0,n-1]\!]} \nabla_i s_{ik} = \frac{1}{2}\nabla_k s. \tag{10.9}$$

El $(0,2)$-tensor E con componentes

$$\forall i,k \in [\![0,n-1]\!]: \quad e_{ik} = s_{ik} - \frac{1}{2}s\overline{g}_{ik}$$

se llama *tensor de Einstein*. Claramente, las identidades contraídas de Bianchi (10.9) son equivalentes a

$$\sum_{i\in[\![0,n-1]\!]} \nabla_i e_{ik} = 0.$$

Ejemplo: La esfera S^2 En $\mathbb{R}^3$ consideremos la esfera S^2_a de radio $a\in\mathbb{R}^+$,

$$S^2_a = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 |\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = a^2\}.$$

Una parametrización de la esfera está dada por las coordenadas esféricas en términos de los ángulos cenital y azimutal

$$x_0 = a \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_1 \quad , \quad x_1 = a \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\theta_1 \quad , \quad x_2 = a\cos\theta_0.$$

S^2_a es pues una C^∞-variedad de dimensión $n=2$. El elemento de superficie, o métrica, satisface:

$$(ds)^2 = a^2((\mathrm{d}\theta_0)^2 + \operatorname{sen}^2\theta_0(\mathrm{d}\theta_1)^2) = [\mathrm{d}\theta_0\ \ \mathrm{d}\theta_1]\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\operatorname{sen}^2\theta_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\theta_0 \\ \mathrm{d}\theta_1\end{bmatrix} = [\mathrm{d}\theta_0\ \ \mathrm{d}\theta_1]G\begin{bmatrix}\mathrm{d}\theta_0 \\ \mathrm{d}\theta_1\end{bmatrix}$$

Atendiendo a las relaciones (7.3) se tiene, por ejemplo, $c_{110} = -\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$ y $c_{011} = c_{101} = \cot\theta_0$. Por tanto, de la relación (10.2) se ha de tener

$$\begin{aligned} r_{0,101} &= \nabla_0 c_{110} - \nabla_1 c_{010} + \sum_{j_1=0}^{1}[c_{0j_10}c_{11j_1} - c_{1j_10}c_{01j_1}] \\ &= (\operatorname{sen}^2\theta_0 - \cos^2\theta_0) - 0 + [0-0] + [0 - (-\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0\ \cot\theta_0)] \\ &= \operatorname{sen}^2\theta_0. \end{aligned}$$

Entonces, de (10.5), $\overline{\overline{r}}_{0101} = g_{00}r_{0101} + g_{01}r_{1101} = a^2\operatorname{sen}^2\theta_0$. De hecho todas las componentes del tensor de Riemann o bien se anulan, o bien coinciden con r_{0101} (salvo un signo). El tensor de Ricci, tiene componentes, de acuerdo con (10.8),

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\theta_0\end{bmatrix}.$$

Por tanto, el escalar de Ricci es $s = \sum_{j=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1}\overline{g}_{j\ell}s_{j\ell} = \frac{2}{a^2}$, y es positivo y constante en la esfera. Esto da cuenta, precisamente, de la regularidad de la esfera. □

1.11 Conmutadores y desviaciones geodésicas

Sea $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^4$ un vector de *velocidad* y sea $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^4$ uno de *momento*. Entonces, la *energía* está dada como $e = -\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}$. Consideremos el $(2,0)$-tensor $\overline{h} = G^{-1} + \mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ con componentes $\overline{h}_{ij} = \overline{g}_{ij} + v_iv_j$. Al considerar el $(0,2)$-tensor h con componentes $h_{ij} = \sum_{k,\ell=0}^{3} g_{ki}g_{\ell j}\overline{h}_{k\ell}$, se tiene $\sum_{i=0}^{3} h_{ij}v_i = 0 = \sum_{j=0}^{3} h_{ij}v_j$. Por tanto $\overline{h}$ y h tienen como arreglo de componentes a diag$[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0]$. Se tendrá entonces $\mathbf{p} = e\mathbf{v} + Gh(\mathbf{p})$, y ésta es una descomposición del momento $\mathbf{p}$ como una suma de una componente paralela a $\mathbf{v}$ y otra ortogonal a $\mathbf{v}$.

Sea $E = (\mathbf{e}_j)_{j=0}^{3}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, que es ortonormal respecto a la métrica de Minkowski $G = (g_{ij})_{i,j\in[\![0,3]\!]}$. Sea $F = (\mathbf{f}_j)_{j=0}^{3}$ otra base ortonormal respecto a G tal que el cuarto vector $\mathbf{f}_3$ coincida con el cuarto de la base canónica $(0,0,0,1)$. Entonces $\mathbf{f}_3^TG\mathbf{f}_3 = -1$ y los primeros tres vectores constituyen una base ortonormal en el espacio de tres dimensiones. La base F es una *cuarteta de observador*. Sea

$\phi = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ el sistema de coordenadas respecto a la base E. Entonces $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$: $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{3} x_j \mathbf{e}_j$. En consecuencia, el elemento de longitud es $dx = \sum_{j=0}^{3} dx_j\, \mathbf{e}_j$, y el de superficie es tal que $(ds)^2 = (dx)^T G dx = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$. De acuerdo con la fórmula de cambio de bases (2.1), si $E = FL$ entonces $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{u} = L\mathbf{x}$ donde $\mathbf{u}$ son las coordenadas respecto a F. El producto escalar $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \mapsto \langle \mathbf{x}_0 | \mathbf{x}_1 \rangle = \mathbf{x}_0^T G \mathbf{x}_1$ es independiente de las coordenadas: $\mathbf{u}_0^T G \mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_0^T L^T G L \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0^T G \mathbf{x}_1$.

Generalizando la relación (10.4), para dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p$ definamos

$$[\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] = (\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}})$$

o equivalentemente, utilizando (7.5),

$$[\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] = \sum_{i,j \in [\![0,3]\!]} \left(u_i\, \partial_i v^j - v_i\, \partial_i u^j \right)\, dx_j = \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) - \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) + \sum_{i,j,k \in [\![0,3]\!]} (c_{i,jk} - c_{jik}) u_i v_j\, dx_k. \tag{11.1}$$

De aquí se sigue que respecto a vectores en la base canónica, los conmutadores se anulan:

$$i \neq j\ ,\ \mathbf{u} = \mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{v} = \mathbf{e}_j \quad \Longrightarrow \quad [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] = 0,$$

pero respecto a cualquier otra base ortonormal F:

$$i \neq j\ ,\ \mathbf{u} = \mathbf{f}_i\ ,\ \mathbf{v} = \mathbf{f}_j \quad \Longrightarrow \quad [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] = \sum_{k \in [\![0,3]\!]} \omega_{ijk}\, dx_k,$$

donde

$$\forall i,j,k \in [\![0,3]\!] :\ \omega_{ijk} = \sum_{i_1, j_1 \in [\![0,3]\!]} \ell_{ii_1} \ell_{jj_1}\, (\partial_{i_1} \ell_{kj_1} - \partial_{j_1} \ell_{ki_1})$$

y $L = (\ell_{ij})_{i,j \in [\![0,3]\!]}$ es la matriz de cambio de base, $E = FL$.

De manera similar a (11.1), se define

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \sum_{i \in [\![0,3]\!]} (u_i\, \partial_i \mathbf{v} - v_i\, \partial_i \mathbf{u})\,. \tag{11.2}$$

Viendo en cada punto $p \in M$ al tensor de torsión, definido por (10.3), como una aplicación $T : T_p \times T_p \to T_p$ entonces se ha de tener

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \tag{11.3}$$

y el tensor de Riemann visto como una aplicación $R : T_p \times T_p \times T_p \to T_p$ queda:

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]} \mathbf{w}. \tag{11.4}$$

Sea M una C^k-variedad de dimensión n, con sistema de coordenadas $\phi = \mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, y sea $(\gamma_s)_{s \in \mathbb{R}}$ una familia de geodésicas tales que

- no se cruzan: $[s_0 \neq s_1 \implies \forall t \in \mathbb{R} :\ \gamma_{s_0}(t) \neq \gamma_{s_1}(t)]$, y
- la transformación $\gamma : \mathbb{R}^2 \to M$, $(s,t) \mapsto \gamma(s,t) = \gamma_s(t)$ es diferenciable.

La imagen de γ es naturalmente una variedad de dimensión 2 y los parámetros s y t forman propiamente un sistema de coordenadas en ella. Se tiene que $\mathbf{t} = \partial_t \mathbf{x}$ es el campo de vectores tangentes y $\mathbf{s} = \partial_s \mathbf{x}$ el de *vectores de desviación*. La *velocidad relativa de las geodésicas* se define como $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n-1} \partial_t x_i\, \nabla_i \mathbf{s}$ y la *aceleración relativa de las geodésicas* como $\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{n-1} \partial_t x_i\, \nabla_i \mathbf{v} = \sum_{i,j=0}^{n-1} \partial_t x_i \partial_t x_j\, \nabla_i \nabla_j \mathbf{s}$.

Por un lado, al ser $\mathbf{t}$ y $\mathbf{s}$ ortonormales, $[\mathbf{t}, \mathbf{s}] = \mathbf{0}$. Supongamos que la torsión de $\mathbf{t}$ y $\mathbf{s}$ es nula. De (11.3) se tiene $\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{s} = \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{t}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{v} \\ &= \nabla_{\mathbf{t}} (\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{s}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_{\mathbf{t}}(\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{t}) \\
&= \nabla_{\mathbf{t}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\partial_s x_i\,\nabla_i\mathbf{t}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\nabla_{\mathbf{t}}(\partial_s x_i)\,\nabla_i\mathbf{t} + \partial_s x_i\,\nabla_{\mathbf{t}}(\nabla_i\mathbf{t})\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\partial_s(\nabla_{\mathbf{t}}x_i)\,\nabla_i\mathbf{t} + \sum_{i=0}^{n-1}\partial_s x_i\,\nabla_i(\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{t}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\partial_s(\nabla_{\mathbf{t}}x_i)\,\nabla_i\mathbf{t} + \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{t} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\partial_s(\nabla_{\mathbf{t}}x_i)\,\nabla_i\mathbf{t} + (\nabla_{\mathbf{t}}\nabla_{\mathbf{s}} + [\nabla_{\mathbf{s}},\nabla_{\mathbf{t}}])\,\mathbf{t} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\partial_s(\nabla_{\mathbf{t}}x_i)\,\nabla_i\mathbf{t} + \nabla_{\mathbf{t}}\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{t} + R(\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{t}) \\
&= R(\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{t})
\end{aligned}
$$

pues, en efecto, $\nabla_{\mathbf{t}}\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{t} = -\sum_{i=0}^{n-1}\partial_s(\nabla_{\mathbf{t}}x_i)\,\nabla_i\mathbf{t}$ (hay que aplicar la Regla de Leibniz para comprobarlo), donde R es el tensor de Riemann. La *ecuación de desviación geodésica* es pues

$$\mathbf{a} = R(\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{t}) \tag{11.5}$$

y asevera que la aceleración es proporcional a la curvatura del espacio.

1.12 Ecuaciones estructurales

Sea $p \in M$ un punto en la variedad, y sea G una métrica en el espacio tangente T_p. En éste, consideraremos la base dada por las derivadas direccionales $D = (\partial_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ y en el cotangente T_p^* la base dada por las diferenciales $D^* = (\mathrm{d}x_j)_{j\in[\![0,n-1]\!]}$, que es la base dual de la base de derivadas direccionales considerada en T_p. Se tiene que la base D en T_p es ortonormal en el sentido de que

$$\forall i,j \in [\![0,n-1]\!]:\ \langle\partial_i|\partial_j\rangle_G = g_{ij},$$

donde $\langle\cdot|\cdot\rangle_G : (\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}^T G\mathbf{v}$. Sea $E = (\mathbf{e}_i)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ otra base de T_p. Expresemos a los elementos de la base inicial en términos de los de la nueva: $\partial_j = \sum_{i\in[\![0,n-1]\!]} e_{ij}\mathbf{e}_i$. Por la ortonormalidad de D:

$$
\begin{aligned}
\forall i,j \in [\![0,n-1]\!]:\ g_{ij} &= \langle\partial_i|\partial_j\rangle_G \\
&= \left\langle \sum_{k_0\in[\![0,n-1]\!]} e_{k_0 i}\mathbf{e}_{k_0} \middle| \sum_{k_1\in[\![0,n-1]\!]} e_{k_1 j}\mathbf{e}_{k_1}\right\rangle_G \\
&= \sum_{k_0\in[\![0,n-1]\!]}\ \sum_{k_1\in[\![0,n-1]\!]} e_{k_0 i}e_{k_1 j}\,\langle\mathbf{e}_{k_0}|\mathbf{e}_{k_1}\rangle_G\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto, si denotamos por $\tilde{\mathbf{e}}_j$ al vector columna de componentes e_{ij} de ∂_j respecto a la base E se tiene

$$\forall i,j \in [\![0,n-1]\!]:\ g_{ij} = \tilde{\mathbf{e}}_i^T H\tilde{\mathbf{e}}_j \tag{12.1}$$

donde

$$H = (\langle\mathbf{e}_{k_0}|\mathbf{e}_{k_1}\rangle_G)_{k_0,k_1\in[\![0,n-1]\!]}\,.$$

Por la relación (12.1) se dice que H es el tensor *raíz cuadrada* de la métrica G.

Sea $\tilde{E} = [\tilde{\mathbf{e}}_0 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}]$ la matriz cuyas columnas son los vectores columna $\tilde{\mathbf{e}}_j$. Sea ahora $E^* = (\mathbf{e}_i^*)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ la base de T_p^*, dual de la base E. Entonces

$$\forall i,j \in [\![0,n-1]\!] : \ \langle \mathbf{e}_i^* | \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

por tanto la matriz $\tilde{E^*} = (\overline{e}_{ij})_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$ que expresa a la base D^* en términos de E^* es tal que $\tilde{E^*} = \tilde{E}^{-1}$.

Si un vector $\mathbf{u} \in T_p$ se expresa por los vectores columna $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\tilde{\mathbf{y}}$ respecto a las bases D y E respectivamente, se tiene $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{E}\tilde{\mathbf{x}}$, en concordancia con (2.1). Si $T \in \mathcal{T}^{(k,\ell)}$ es un tensor, entonces sus componentes se cambian, respecto a las bases iniciales y a las nuevas, similarmente a (3.3).

De manera general se puede suponer que los cambios de base están dados por transformaciones de Lorentz, $\tilde{E} = L$, o sea $L^T G L = G$.

Sea T un $(2,2)$-tensor. Supongamos que el arreglo de componentes $(T_{ij,k\ell})_{i,j,k,\ell\in[\![0,n-1]\!]}$ lo representa respecto a la base $D^* \otimes E^* \otimes D \otimes E$ (es pues un tensor representado en una base *mixta*). Al representarlo respecto a $E^* \otimes D^* \otimes E \otimes D$, las componentes se transforman, según (3.3), como:

$$\tilde{T}_{i'j',k'\ell'} = \sum_{i,j,k,\ell} \overline{e}_{i'i}\, e_{j'j}\, \partial_{x_k} y_{k'}\, \partial_{y_{\ell'}} x_\ell\, T_{ij,k\ell} \tag{12.2}$$

Ahora bien, si $\mathbf{u} = \sum_{j=0}^{n-1} u_j\, \partial_j$ es un vector en T_p, de manera similar a (7.4) y (7.5), su derivada covariante es el $(1,1)$-tensor

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u}) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} (\nabla_i u_j)\ \mathrm{d}x_i \otimes \partial_j \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \left[\partial_i u_j + \sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij}\right] \mathrm{d}x_i \otimes \partial_j \\ &= [\mathrm{d}x_0 \ \cdots \ \mathrm{d}x_{n-1}]\ M \begin{bmatrix} \partial_0 \\ \vdots \\ \partial_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= (\mathrm{d}\mathbf{x})^T\, M\, \boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \tag{12.3}$$

donde $M = [\mu_{ij}]_{i,j,k\in[\![0,n-1]\!]}$ con

$$\mu_{ij} = \partial_i u_j + \sum_{k=0}^{n-1} u_k c_{k,ij} = \partial_i u_j + \mathbf{c}_{ij}^T \mathbf{u}. \tag{12.4}$$

Sea $(\omega_{i,jk})_{i,j,k\in[\![0,n-1]\!]}$ el arreglo de componentes del tensor de conexión respecto a la base $D^* \otimes E \otimes E$. Sea $\mathbf{v}$ el vector columna que representa a $\mathbf{u} \in T_p$ respecto a la base E. Al hacer el cambio de bases, resulta $\mathbf{v} = \tilde{E}\mathbf{u}$, y (12.4) queda:

$$\mu_{ij}^{\mathrm{nvo}} = \partial_{y_i} v_j + \boldsymbol{\omega}_{ij}^T \mathbf{v} = \partial_{y_i}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e_{jk} u_k\right) + \boldsymbol{\omega}_{ij}^T \tilde{E}\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{n-1} \left((\partial_{y_i} e_{jk}) u_k + e_{jk}(\partial_{y_i} u_k)\right) + \boldsymbol{\omega}_{ij}^T \tilde{E}\mathbf{u}. \tag{12.5}$$

Como $E = \tilde{E}^{-1}\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}}$ el análogo a (12.3) queda:

$$\nabla(\mathbf{u}) = (\mathrm{d}\mathbf{x})^T\, M^{\mathrm{nvo}}\, E = (\mathrm{d}\mathbf{x})^T\, M^{\mathrm{nvo}}\, \tilde{E}^{-1}\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}} \tag{12.6}$$

donde $M^{\mathrm{nvo}} = \left[\mu_{ij}^{\mathrm{nvo}}\right]_{i,j,k\in[\![0,n-1]\!]}$. Comparando (12.6) con (12.3) se tiene $M = M^{\mathrm{nvo}}\, \tilde{E}^{-1}$, y al comparar (12.5) con (12.4) se obtiene

$$c_{i,jk} = \sum_{i_1=0}^{n-1}\left(\quad \overline{e}_{ii_1}\, \partial_j e_{i_1 k} + \sum_{k_1=0}^{n-1} \overline{e}_{ii_1} e_{kk_1} \omega_{j,i_1k_1}\right), \tag{12.7}$$

o equivalentemente

$$\omega_{i,jk} = \sum_{j_1=0}^{n-1} \left(-\overline{e}_{j_1 k}\, \partial_i e_{jj_1} + \sum_{k_1=0}^{n-1} e_{jk_1} \overline{e}_{kj_1} c_{k_1,ij_1} \right). \tag{12.8}$$

Se tiene de aquí que vale el *postulado de la cuarteta* (debido a que fue planteado inicialmente en un espacio-tiempo de dimensión 4):

$$\forall i,j,k \in [\![0, n-1]\!] :\ \nabla_i e_{jk} = 0.$$

Si se pasa a una segunda base E', al componer (12.8) (yendo de la base E' a D) con (12.7) (yendo de la base D a E) se tiene que el arreglo $\left(\omega'_{i,jk}\right)_{i,j,k\in[\![0,n-1]\!]}$ de componentes del tensor de conexión respecto a la base $D^* \otimes E' \otimes E'$ queda

$$\omega'_{i,jk} = -\sum_{i_1=0}^{n-1} \overline{e}_{i_1 k}\, \partial_i e_{ji_1} + \sum_{j_1,k_1=0}^{n-1} e_{jj_1} \overline{e}_{kk_1} \omega_{i,j_1 k_1}. \tag{12.9}$$

Por otro lado, si A es un $(1,1)$-tensor y el arreglo de coeficientes $(a_{i,j})_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$ lo representa respecto a una base $E^* \otimes E$, entonces sus derivadas covariantes quedan expresadas como

$$\forall i,j,k \in [\![0, n-1]\!] :\ \nabla_i(a_{j,k}) = \partial_i a_{j,k} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[\omega_{i,j\ell} a_{\ell,k} - \omega_{i,\ell k} a_{j,\ell}\right] \tag{12.10}$$

El $(1,1)$-tensor A puede ser visto como una función lineal:

$$T_p \to \mathcal{T}^{(1,0)}\ ,\ \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) \text{ donde } A(\mathbf{x}) : \mathbf{y}^* \mapsto A(\mathbf{y}^*; \mathbf{x}). \tag{12.11}$$

Como $\mathcal{T}^{(1,0)} \approx T_p$ mediante una identificación natural, se tiene que (12.11) determina de hecho una aplicación lineal $T_p \to T_p$, una 1-*forma vectorial*. También A puede ser visto como la aplicación lineal:

$$T_p^* \to \mathcal{T}^{(0,1)}\ ,\ \mathbf{y}^* \mapsto A(\mathbf{y}^*) \text{ donde } A(\mathbf{y}^*) : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{y}^*; \mathbf{x}), \tag{12.12}$$

y ésta es de hecho una aplicación lineal $T_p^* \to T_p^*$, una 1-*forma funcional* o *covectorial*.

Similamente, si $A = (a_{ijk,\ell})_{i,j,k,\ell\in[\![0,n-1]\!]}$ es un arreglo que representa a un $(3,1)$-tensor A respecto a una base $D^* \otimes D^* \otimes E^* \otimes E$ entonces éste determina una transformación lineal

$$A : (T_p^*)^2 \to \mathcal{T}^{(1,1)}\ ,\ (\mathbf{y}_0^*, \mathbf{y}_1^*) \mapsto A(\mathbf{y}_0^*, \mathbf{y}_1^*) \text{ donde } A(\mathbf{y}_0^*, \mathbf{y}_1^*) : \mathbf{y}_2^* \mapsto A(\mathbf{y}_0^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*; \mathbf{x}). \tag{12.13}$$

Sea $A \in \mathcal{T}^{(1,1)}$ un $(1,1)$-tensor representado en la base $D^* \otimes E$ por el arreglo $A = (a_{jk})_{j,k\in[\![0,n-1]\!]}$ y veámoslo como una 1-forma vectorial según (12.11). Su derivada exterior, un $(2,1)$-tensor, debería tener componentes

$$\forall i,j,k \in [\![0, n-1]\!] :\ (\mathrm{d}A)_{ij,k} = \partial_i a_{jk} - \partial_j a_{ik}.$$

Por razones de homogeneidad en los tensores involucrados, consideremos para cada $k \in [\![0, n-1]\!]$ el $(2,0)$-tensor $B_k = (\mathrm{d}A)_k + \boldsymbol{\omega}_k \wedge A$, con $\boldsymbol{\omega}_k = (\omega_{i,kj})_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$. De manera similar a (12.10), sus componentes han de ser

$$\forall i,j \in [\![0, n-1]\!] :\ b_{ij,k} = \partial_i a_{jk} - \partial_j a_{ik} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left[\omega_{i,k\ell} a_{j,\ell} - \omega_{j,k\ell} a_{i,\ell}\right]. \tag{12.14}$$

En particular, cuando $A = \tilde{E}$ está dado por la matriz de cambio de base, B_k ha de coincidir con el tensor de torsión $\boldsymbol{\tau}_k = (\tau_{ij,k})_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$ definido por (10.3):

$$\boldsymbol{\tau}_k = (\mathrm{d}\tilde{E})_k + \boldsymbol{\omega}_k \wedge \tilde{E}. \tag{12.15}$$

Y si $A = \boldsymbol{\omega}_\ell$ entonces B_k va a coincidir con el tensor de Riemann cuyas componentes están definidas por (10.2):

$$R_{k\ell} = (\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_\ell)_k + \boldsymbol{\omega}_k \wedge \boldsymbol{\omega}_\ell. \tag{12.16}$$

Las relaciones (12.15) y (12.17) se llaman *ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan.*

También de (12.14) puede obtenerse las relaciones siguientes:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_k + \boldsymbol{\omega}_k \wedge \boldsymbol{\tau}_\ell = R_{k\ell} \wedge \tilde{E} \tag{12.17}$$

$$\mathrm{d}R_{k\ell} + \boldsymbol{\omega}_k \wedge R_{m\ell} - R_{km} \wedge \boldsymbol{\omega}_\ell = 0 \tag{12.18}$$

la última de las cuales es una generalización de las identidades de Bianchi (10.7).

Referencias

[1] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Benjamin Cummings, 2003.

[2] Bernard Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* Cambridge University Press, New York, 1980.