Prontuario de Geometría Algebraica

Guillermo Morales-Luna
Departmento de Computación
(CINVESTAV-IPN)
`gmorales@cs.cinvestav.mx`

19 de octubre de 2011

Resumen

Estas notas pretenden ser un recordatorio de conceptos fundamentales de Geometría Algebraica y ser también las de un curso introductorio a la Geometría Algebraica. La presente revisión ha de dar un panorama del tema enumerando sus nociones y resultados de mayor relevancia. Las demostraciones formales fueron omitidas y se las refiere a la bibliografía al final de estas notas.

Contenido

1 Preliminares

1.1 Resultantes

Seguiremos aquí la presentación en [1].

Sea $\mathbb{C}$ el campo de los números complejos y sean

$$P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \quad , \quad Q(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \in \mathbb{C}[X] \tag{1}$$

dos polinomios de grados m y n respectivamente. Sea $M_{P(X),Q(X)} \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(m+n)}$ la matriz con entrada general m_{ij}, $i,j \in [\![0, m+n-1]\!]$, donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{m-(i-j)} & \text{si } 0 \leq j \leq n-1 \ \&\ j \leq i \leq m-1+j \\ b_{n-(i-j+n)} & \text{si } n \leq j \leq n+m-1 \ \&\ j-n \leq i \leq j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

es decir, si se define

$$M_{P(X),n} = \begin{bmatrix} a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \ddots & \ddots & a_m \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{(m+n)\times n}$$

entonces $M_{P(X),Q(X)} = \begin{bmatrix} M_{P(X),n} & M_{Q(X),m} \end{bmatrix}$. El *resultante* de $P(X)$ y $Q(X)$ es

$$\mathrm{Res}(P(X), Q(X)) = \det M_{P(X),Q(X)} \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Proposición 1.1 *Las siguientes propiedades son verdaderas:*

Conmutatividad signada. $\mathrm{Res}(P(X), Q(X)) = (-1)^{mn}\,\mathrm{Res}(Q(X), P(X))$.

En términos de las raíces. *Si* $x_0, \ldots, x_{m-1}$ *son las raíces de* $P(X)$ *y* $y_0, \ldots, y_{n-1}$ *son las de* $Q(X)$ *entonces*

$$\mathrm{Res}(P(X), Q(X)) = a_m b_n \prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=0}^{n-1} (x_i - y_j) = a_m \prod_{i=0}^{m-1} Q(x_i) = (-1)^{mn} b_n \prod_{j=0}^{n-1} P(y_j).$$

Forma polinomial entera. $\mathrm{Res}(P(X), Q(X))$ *está dado mediante un polinomio de coeficientes enteros respecto a los coeficientes de* $P(X)$ *y* $Q(X)$.

Factor común. $\mathrm{Res}(P(X), Q(X)) = 0$ *cuando y sólo cuando* $P(X)$ *y* $Q(X)$ *poseen un factor común no-trivial en* $\mathbb{K}[X]$.

Eliminación. $\mathrm{Res}(P(X), Q(X))$*, visto como un polinomio constante, es una combinación lineal de* $P(X)$ *y* $Q(X)$ *con coeficientes en* $\mathbb{C}[X]$ *dados como polinomios de coeficientes enteros respecto a los coeficientes de* $P(X)$ *y* $Q(X)$.

Otra caracterización del resultante es la siguiente: Para un polinomio $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ sea $\mathbb{C}[X]/(P(X))$ su anillo de residuos. Sea $h_{Q(X)} : \mathbb{C}[X]/(P(X)) \to \mathbb{C}[X]/(P(X))$ la homotecia $[R(X)] \mapsto [Q(X)\, R(X)]$. Entonces:

$$\mathrm{Res}(P(X), Q(X)) = a_m \det(h_{Q(X)}). \tag{3}$$

Ahora, sean

$$F_P(X, Y) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i Y^{m-i} \quad , \quad F_Q(X, Y) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j Y^{n-j} \in \mathbb{C}[X, Y] \tag{4}$$

dos polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[X, Y]$. Si $P(X)$ y $Q(X)$ están definidos como en (1), entonces se tiene

$$F_P(X, Y) = Y^m\, P\left(\frac{X}{Y}\right) \quad , \quad F_Q(X, Y) = Y^n\, Q\left(\frac{X}{Y}\right), \tag{5}$$

por lo que se dice que $F_P(X, Y)$ y $F_Q(X, Y)$ se obtienen *por homogenización* a partir de $P(X)$ y $Q(X)$ mediante (5). En este caso, se define

$$\mathrm{Res}(F_P(X, Y), F_Q(X, Y)) = \mathrm{Res}(P(X), Q(X)) = \det M_{P(X), Q(X)} \tag{6}$$

(véase la ec. (5)). De acuerdo con la relación nombrada “Factor común” en la proposición 1.1, se tiene:

Observación 1.1 $\mathrm{Res}(F_P(X, Y), F_Q(X, Y)) = 0$ *cuando y sólo cuando el sistema de ecuaciones* $F_P(X, Y) = 0$*,* $F_Q(X, Y) = 0$ *tiene soluciones no-triviales, es decir, en* $\mathbb{C} - \{(0, 0)\}$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathbf{X}_{n+1} = (X_0, \cdots, X_n)$ una colección de $n + 1$ *indeterminadas*. Sea $(F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^{n}$ una colección de $(n + 1)$ polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[\mathbf{X}_{n+1}]$, cada uno $F_i(\mathbf{X}_{n+1})$ de grado total, digamos, d_i, escribamos $F_i(\mathbf{X}_{n+1}) = \sum_{\mathbf{e} \in I} a_{i,\mathbf{e}} \mathbf{X}^{\mathbf{e}}$, con $I_i = \{\mathbf{e} \in [\![0, n]\!] |\ \sum_{j=0}^{n} e_j = d_i\}$ y $\mathbf{X}^{\mathbf{e}} = \prod_{j=0}^{n} X_j^{e_j}$. Consideremos el sistema de $(n + 1)$ ecuaciones con $(n + 1)$ incógnitas:

$$\forall i \in [\![0, n]\!] :\ F_i(\mathbf{X}_{n+1}) = 0 \tag{7}$$

y veamos bajo cuáles condiciones éste posee una solución no-trivial $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$.

Por supuesto, si $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $d_i = 1$, entonces la Regla de Cramer da condiciones para que el sistema (7) posea soluciones no-triviales: $\det \left[a_{i,\{j\}}\right]_{i,j \in [\![0,n+1]\!]} \neq 0$.

Para cada $i \in [\![0, n]\!]$ y cada $\mathbf{e} \in I_i$ remplacemos el coeficiente $a_{i,\mathbf{e}}$ por una indeterminada $A_{i,\mathbf{e}}$ y sea $\mathbf{A} = \bigcup_{i \in [\![0,n]\!]} \{A_{i,\mathbf{e}} |\ \mathbf{e} \in I_i\}$. Para un polinomio $P(\mathbf{A}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{A}]$ denotemos por $P\left((F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^{n}\right)$ el valor que se obtiene mediante la sustitución $A_{i,\mathbf{e}} = a_{i,\mathbf{e}}$, para todos $i \in [\![0, n]\!]$ y $\mathbf{e} \in I_i$. Se dice, por todo esto, que $P(\mathbf{A})$ es un polinomio entero respecto a los coeficientos de los polinomios homogéneos $(F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^{n}$.

Proposición 1.2 *Fijo un vector de grados* $\mathbf{d} = (d_0, \ldots, d_n) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+1}$ *existe un único polinomio* $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(\mathbf{A}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{A}]$ *tal que:*

- *Si* $(F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^n \subset \mathbb{C}[\mathbf{X}_{n+1}]$ *es una colección de polinomios homogéneos, cada uno de grado* d_i*, entonces el sistema (7) posee soluciones no-triviales cuando y sólo cuando* $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}\left((F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^n\right) = 0$.

- *Si* $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $F_i(\mathbf{X}_{n+1}) = X_i^{d_i}$*, entonces* $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}\left((F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^n\right) = 1$.

- $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(\mathbf{A})$ *es un polinomio irreducible aún cuando se le ve como uno en* $\mathbb{C}[\mathbf{A}]$.

El valor $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}\left((F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^n\right)$ se dice ser el *resultante multipolinomial* de los polinomios homogéneos $(F_i(\mathbf{X}_{n+1}))_{i=0}^n$. Se tiene:

- Para $n=1$, $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(F_0(X,Y), F_1(X,Y))$ coincide con $\mathrm{Res}(F_0(X,Y), F_1(X,Y))$ definido por la ec. (6).

- Por la regla de Cramer, si $\mathbf{d} = (1,\ldots,1) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+1}$ entonces $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(\mathbf{A}) = \det\left[a_{i,\{j\}}\right]_{i,j\in[\![0,n+1]\!]}$.

- Para $n=2$ y $\mathbf{d} = (2,2,2) \in (\mathbb{Z}^+)^3$, considerando las formas cuadráticas

$$\begin{aligned}
F_0(X_0,X_1,X_2) &= a_{00}X_0^2 + a_{01}X_1^2 + a_{02}X_2^2 + a_{03}X_0X_1 + a_{04}X_0X_2 + a_{05}X_1X_2 \\
F_1(X_0,X_1,X_2) &= a_{10}X_0^2 + a_{11}X_1^2 + a_{12}X_2^2 + a_{13}X_0X_1 + a_{14}X_0X_2 + a_{15}X_1X_2 \\
F_2(X_0,X_1,X_2) &= a_{20}X_0^2 + a_{21}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{23}X_0X_1 + a_{24}X_0X_2 + a_{25}X_1X_2
\end{aligned}$$

  el resultante tripolinomial $\mathrm{Res}_{(2,2,2)}(F_0(X_0,X_1,X_2), F_1(X_0,X_1,X_2), F_2(X_0,X_1,X_2))$ posee 18 variables (los coeficientes a_{ij}, $(i,j) \in [\![0,2]\!] \times [\![0,5]\!]$), grado 12 e involucra 21894 monomios. De hecho, al considerar el jacobiano

$$J(X_0,X_1,X_2) = \det\left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right|_{(X_0,X_1,X_2)}\right)_{i,j\in[\![0,2]\!]}$$

  éste determina un polinomio homogéneo de grado 3, y en consecuencia sus derivadas parciales también lo son, pero de grado 2. Al escribir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_0}{\partial X_0}(X_0,X_1,X_2) &= b_{00}X_0^2 + b_{01}X_1^2 + b_{02}X_2^2 + b_{03}X_0X_1 + b_{04}X_0X_2 + b_{05}X_1X_2 \\
\frac{\partial F_1}{\partial X_1}(X_0,X_1,X_2) &= b_{10}X_0^2 + b_{11}X_1^2 + b_{12}X_2^2 + b_{13}X_0X_1 + b_{14}X_0X_2 + b_{15}X_1X_2 \\
\frac{\partial F_2}{\partial X_2}(X_0,X_1,X_2) &= b_{20}X_0^2 + b_{21}X_1^2 + b_{22}X_2^2 + b_{23}X_0X_1 + b_{24}X_0X_2 + b_{25}X_1X_2
\end{aligned}$$

  y hacer $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![0,2]\!]\times[\![0,5]\!]}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![0,2]\!]\times[\![0,5]\!]}$ se tendrá:

$$\mathrm{Res}_{(2,2,2)}(F_0(X_0,X_1,X_2), F_1(X_0,X_1,X_2), F_2(X_0,X_1,X_2)) = -2^{-9}\det\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}$$

Enlistemos algunas propiedades de los resultantes multipolinomiales. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{d} = (d_0,\ldots,d_n) \in (\mathbb{Z}^+)^{n+1}$, $I_i = \{\mathbf{e} \in [\![0,n]\!] |\ \sum_{j=0}^n e_j = d_i\}$, $\mathbf{A}_i = \{A_{i,\mathbf{e}} |\ \mathbf{e} \in I_i\}$ y $\mathbf{A} = \bigcup_{i\in[\![0,n]\!]}\mathbf{A}_i$.

Proposición 1.3 *Para cada* $i \in [\![0,n]\!]$*, el polinomio* $\mathrm{Res}_{i,d_i}(\mathbf{A}_i) = \mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(\mathbf{A}) \in (\mathbb{Z}[\mathbf{A}-\mathbf{A}_i])[\mathbf{A}_i]$ *es homogéneo de grado* $\prod_{j\neq i} d_j$*. En consecuencia, el grado total de* $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}$ *es* $\sum_{i=0}^n \prod_{j\neq i} d_j$.

Para una $(n+1)$-ada $(\xi_0,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_n)$ cualquiera definamos las siguientes operaciones:

- Para una transposición $\tau = (i,j) \in S_{n+1}$ denotemos por

$$\tau(\xi_0,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_n) = (\xi_0,\ldots,\xi_j,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_n)$$

  a la $(n+1)$-ada que resulta de intercambiar de posición las entradas i y j.

- Para un índice i y un valor η denotemos por

$$\sigma_{i\eta}(\xi_0, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n) = (\xi_0, \ldots, \eta, \ldots, \xi_n)$$

a la $(n+1)$-ada que resulta de remplazar la entrada i-ésima por el valor η.

Proposición 1.4 *Las siguientes aseveraciones son verdaderas:*

- $\forall i, j : \left[i < j \implies \mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(F_0, \cdots, F_n) = (-1)^{d_0 \cdots d_n} \mathrm{Res}_{\tau\mathbf{d}}(\tau(F_0, \cdots, F_n))\right]$.
- *Si $F_i = F_{i0}F_{i1}$ es el producto de dos polinomios homogéneos de grados respectivos d_{i0} y d_{i1} entonces*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(F_0, \cdots, F_i, \cdots, F_n) = \mathrm{Res}_{\sigma_{id_{i0}}(\mathbf{d})}(\sigma_{iF_{i0}}(F_0, \cdots, F_n) \cdot \mathrm{Res}_{\sigma_{id_{i1}}(\mathbf{d})}(\sigma_{iF_{i1}}(F_0, \cdots, F_n).$$

Para un polinomio homogéneo $F(\mathbf{X}_{n+1}) \in \mathbb{C}_d[\mathbf{X}_{n+1}]$ de grado d se define los polinomios:

$$\begin{aligned} F^0(\mathbf{X}_n) &= F(\sigma_{n,0}(\mathbf{X}_{n+1})) = F(X_0, \ldots, X_{n-1}, 0) \\ F^1(\mathbf{X}_n) &= F(\sigma_{n,1}(\mathbf{X}_{n+1})) = F(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1). \end{aligned}$$

Es claro que $F^0(\mathbf{X}_n) \in \mathbb{C}_d[\mathbf{X}_n]$ es homogéneo de grado d con una variable menos.

Un análogo a la relación (3) se enuncia como sigue:

Proposición 1.5 *Si $\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(F_0, \cdots, F_n) \neq 0$ entonces el cociente $\mathbb{C}[\mathbf{X}_n]/\left(\left(F_i^1(\mathbf{X}_n)\right)_{i=0}^{n-1}\right)$, visto como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, es de dimensión $d_0 \cdots d_{n-1}$ y*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{d}}(F_0, \cdots, F_n) = \left(\mathrm{Res}_{(d_0, \ldots, d_{n-1})}(F_0^1, \cdots, F_{n-1}^1)\right)^{d_n} \det h_{F_n^1} \qquad \text{(Fórmula de Poisson)},$$

donde $h_{F_n^1} : \mathbb{C}[\mathbf{X}_n]/\left(\left(F_i^1(\mathbf{X}_n)\right)_{i=0}^{n-1}\right) \to \mathbb{C}[\mathbf{X}_n]/\left(\left(F_i^1(\mathbf{X}_n)\right)_{i=0}^{n-1}\right)$ es la homotecia $[P(\mathbf{X}_n)] \mapsto [F_n^1(\mathbf{X}_n)\, P(\mathbf{X}_n)]$.

1.2 Productos tensoriales

Seguiremos aquí la presentación en [6].

1.2.1 Producto tensorial de módulos

Sean R un anillo y M, N dos R-módulos. Un R-módulo T, junto con una transformación bilineal $\beta : M \times N \to T$, es un *producto tensorial* de M, N sobre R si satisface la siguiente *Propiedad Universal del Producto Tensorial*:

> Para cualquier R-módulo S, si $\beta' : M \times N \to S$ es una transformación bilineal entonces existe un único homomorfismo de R-módulos $\phi : T \to S$ tal que $\beta' = \phi \circ \beta$, es decir, que hace conmutativo el diagrama
>
> $$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta'"'] & T \arrow[d, dotted, "\phi"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad (8)$$

Una construcción directa consiste del R-módulo libre $R^{M \times N}$, con la base natural $\left(\mathbf{e}_{(x,y)}\right)_{(x,y) \in M \times N}$, reducido por el submódulo L de $R^{M \times N}$ generado por los elementos de las formas:

$$\mathbf{e}_{(x_0+x_1,y)} - \mathbf{e}_{(x_0,y)} - \mathbf{e}_{(x_1,y)} \quad , \quad \mathbf{e}_{(x,y_0+y_1)} - \mathbf{e}_{(x,y_0)} - \mathbf{e}_{(x,y_1)} \quad , \quad \mathbf{e}_{(rx,y)} - \mathbf{e}_{(x,ry)} \quad , \quad r\mathbf{e}_{(x,y)} - \mathbf{e}_{(rx,y)}$$

con $x, x_0, x_1 \in M$, $y, y_0, y_1 \in N$ y $r \in R$. $T = (R^{M \times N})/L$. La transformación β es la composición de funciones $(x, y) \mapsto \mathbf{e}_{(x,y)} \mapsto \pi(\mathbf{e}_{(x,y)}) = [\mathbf{e}_{(x,y)}]$. Se denota, usualmente, al producto tensorial como $H = M \otimes_R N$ (por lo general la transformación β en general queda supuesta), y a los elementos en la base canónica se les escribe $\mathbf{e}_{(x,y)} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y$, por lo que cualquier elemento de $M \otimes_R N$ se expresa como $\sum_{(x,y) \in I} r_{(x,y)} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y$, con coeficientes $r_{(x,y)} \in R$ en el anillo R, para un conjunto finito $I \subset M \times N$.

Proposición 1.6 *Para cualquier R-módulo M se tiene $M \otimes_R R = M$.*

En efecto, consideremos la transformación bilineal dada por el producto por escalares, $\beta : M \times R \to M$, $(x,r) \mapsto \beta(x,r) = rx$. Si S es un R-módulo cualquiera y $\beta' : M \times R \to S$ es una transformación bilineal, entonces $\phi : x \mapsto \phi(x) = \beta(x,1)$ es el único R-homomorfismo $M \to S$ tal que $\beta' = \phi \circ \beta$.

Proposición 1.7 *El producto tensorial "es" conmutativo, asociativo y distributivo. Es decir, para cualesquiera R-módulos:*

- $M \otimes_R N = N \otimes_R M$,
- $(L \otimes_R M) \otimes_R N = L \otimes_R (M \otimes_R N)$,
- $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_R N = \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_R N)$.

En efecto, estas relaciones se siguen de la propiedad universal (8).

Se dice que un *complejo* de R-módulos es una sucesión $((M_i, f_i))_{i\in I}$, donde $f_i : M_i \to M_{i+1}$ es un homomorfismo de R-módulos, tal que $\forall i$, $f_{i+1} \circ f_i = 0$. Tal complejo se escribe más bien

$$\cdots \to M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \to \cdots$$

y se dice que es *exacto* si $\mathrm{img}(f_i) = \ker(f_{i+1})$.

Así, se tiene que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ es exacta si y sólo si f es inyectiva y $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ lo es si y sólo si f es suprayectiva.

Proposición 1.8 (Exactitud derecha del producto tensorial) *Si se tiene una sucesión exacta*

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow 0$$

de R-módulos, entonces para cualquier R-módulo N, es exacta la sucesión

$$M_0 \otimes_R N \xrightarrow{f_{0N}} M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f_{1N}} M_2 \otimes_R N \longrightarrow 0,$$

donde, para $i = 0, 1$, f_{iN} es el homomorfismo que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \times N \arrow[r, "(f_i,\mathrm{id}_N)"] \arrow[d, "\beta_i"'] & M_{i+1} \times N \arrow[d, "\beta_{i+1}"] \\ M_i \otimes_R N \arrow[r, "f_{iN}"'] & M_{i+1} \otimes_R N \end{tikzcd}$$

1.2.2 Producto tensorial de álgebras

Sea R un anillo. Una *R-álgebra* es un anillo A junto con un homomorfismo de anillos $\alpha : R \to A$. En tal caso, A es también un R-módulo con el producto por escalares $(r,x) \mapsto \alpha(r)\,x$.

Sean A_0, A_1 dos R-álgebras. Una R-álgebra B, junto con dos homomorfismos de R-álgebras $p_0 : A_0 \to B$, $p_1 : A_1 \to B$, es un *producto tensorial* de A_0, A_1 si satisface la siguiente *Propiedad Universal del Producto Tensorial*:

> Para cualquier R-álgebra C, y para cualesquiera dos homomorfismos de R-álgebras $q_0 : A_0 \to C$, $q_1 : A_1 \to C$, existe un único homomorfismo de R-álgebras $\phi : B \to C$ tal que $q_0 = \phi \circ p_0$ y $q_1 = \phi \circ p_1$, es decir, que hace conmutativo el diagrama
>
> $$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[dr, "q_0"'] & B \arrow[d, dotted, "\phi"] & A_1 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[dl, "q_1"] \\ & C & \end{tikzcd} \tag{9}$$

Consideremos por un momento a las R-álgebras A_0, A_1 como R-módulos. Sea $B = A_0 \otimes_R A_1$ su producto tensorial de módulos. La transformación $g : A_0 \times A_1 \times A_0 \times A_1 \to B$, $(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{11}) \mapsto (a_{00}\, a_{01}) \otimes (a_{10}\, a_{11})$ es multilineal, por lo cual puede factorizarse mediante una transformación bilineal $\hat{g} : B \otimes_R B \to B$. Con este producto, B es una R-álgebra, y junto con las funciones $p_0 : A_0 \to A_0 \otimes_R A_1$ y $p_1 : A_1 \to A_0 \otimes_R A_1$, $p_0 : r_0 \mapsto r_0 \otimes 1_{A_1}$ y $p_1 : r_1 \mapsto 1_{A_0} \otimes r_1$ que son homomorfismos de R-álgebras, cumple con la propiedad universal (9). Así pues, el producto tensorial de R-álgebras es $A_0 \otimes_R A_1$.

2 Variedades algebraicas

Presentamos aquí los conceptos básicos de variedades algebraicas, siguiendo textos convencionales tales como [2, 3, 5].

2.1 Variedades afines

2.1.1 Topología de Zariski

Sea $\mathbb{K}$ un campo. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{X} = (X_i)_{i=0}^{n-1}$ una colección de n *indeterminadas*. Sea $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ el anillo de polinomios de n variables. Sea $\mathrm{ev}_n : \mathbb{K}[\mathbf{X}] \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ la función de evaluación, $(P(\mathbf{X}), \mathbf{x}) \mapsto P(\mathbf{x})$. Para cada polinomio $P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ su *conjunto de ceros* es $Z(P(\mathbf{X})) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n |\ P(\mathbf{x}) = 0\}$, y para un conjunto de polinomios $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ se define $Z(\mathcal{P}) = \bigcap\{Z(P(\mathbf{X}))|\ P(\mathbf{X}) \in \mathcal{P}\}$. Naturalmente, si $\mathcal{I}(\mathcal{P}) = (\mathcal{P})$ es el ideal generado por $\mathcal{P}$, entonces $Z(\mathcal{I}(\mathcal{P})) = Z(\mathcal{P})$. Ya que $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ es noetheriano, todo ideal es generado finitamente, por tanto existe un conjunto finito de polinomios $\{P_j(\mathbf{X})\}_{j=0}^{k-1}$ tal que $Z(\mathcal{P}) = \bigcap_{j=0}^{k-1} Z(P_j(\mathbf{X}))$.

Un conjunto $A \subset \mathbb{K}^n$ es *algebraico* si existe un conjunto de polinomios $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ tal que $A = Z(\mathcal{P})$.

Observación 2.1 *La colección de conjuntos algebraicos en $\mathbb{K}^n$ es cerrada bajo las operaciones conjuntistas y contiene a todo el espacio $\mathbb{K}^n$.*

La *topología de Zariski* de $\mathbb{K}^n$ es la que tiene como conjuntos abiertos a los complementos de conjuntos algebraicos.

Por ejemplo, para $n = 1$, se tiene que todo ideal de $\mathbb{K}[X]$ es principal, por tanto todo conjunto algebraico es el conjunto de raíces de algún polinomio. La topología de Zariski tiene como conjuntos abiertos a los conjuntos cofinitos y al conjunto vacío. El espacio resultante no es de Hausdorff.

Un conjunto $A \subset \mathbb{K}^n$ es *irreducible* si no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos propios, ambos cerrados en A.

Por ejemplo, para $n = 1$, $\mathbb{K}$ es irreducible.

Una *variedad afín algebraica*, o de manera sencilla *variedad afín*, es un conjunto cerrado irreducible de $\mathbb{K}^n$. Un subconjunto abierto de una variedad afín es una *casi-variedad afín*.

Para un conjunto $A \subset \mathbb{K}^n$, su *ideal* es $\mathcal{I}(A) = \{P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]|\ \forall \mathbf{x} \in A :\ P(\mathbf{x}) = 0\}$.

Proposición 2.1 *Las siguientes aseveraciones son verdaderas:*

- $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ & $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \implies Z(\mathcal{P}_0) \supset Z(\mathcal{P}_1)$.
- $A_0, A_1 \subset \mathbb{K}^n$ & $A_0 \subset A_1 \implies \mathcal{I}(A_0) \supset \mathcal{I}(A_1)$.
- $A_0, A_1 \subset \mathbb{K}^n \implies \mathcal{I}(A_0 \cup A_1) = \mathcal{I}(A_0) \cap \mathcal{I}(A_1)$.
- $I \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ *ideal* $\implies \mathcal{I}(Z(I)) = \mathrm{rad}(I)$*, donde* $\mathrm{rad}(I) = \{P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]|\ \exists m \in \mathbb{N} :\ P(\mathbf{X})^m \in I\}$ *es el* radical *de I.*
- $A \subset \mathbb{K}^n \implies Z(\mathcal{I}(A)) = \overline{A}$ *que es la cerradura de A.*

Teorema 2.1 (*Nullstellensatz* de Hilbert) *Sea $\mathbb{K}$ un campo algebraicamente cerrado e $I < \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ un ideal. Si $P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ se anula en $Z(I)$ entonces $P(\mathbf{X}) \in \mathrm{rad}(I)$.*

Un ideal I es *radical* si $I = \mathrm{rad}(I)$.

Corolario 2.1 *Existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos algebraicos en* $\mathbb{K}^n$ *y los ideales radicales de* $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$.

Se sigue que $\mathbb{K}^n$ es irreducible pues corresponde al ideal nulo, que es primo.

Si $P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ es irreducible, entonces $I = \mathcal{I}(P(\mathbf{X}))$ es un ideal primo y por tanto $Z(I)$ es irreducible. $Z(I)$ se dice ser la *curva afín* determinada por $P(\mathbf{X})$, cuyo *grado* es el grado de $P(\mathbf{X})$.

Un ideal maximal $I < \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ corresponde a un punto en $\mathbb{K}^n$. Por tanto los ideales maximales son de la forma $I = (X_i - a_i)_{i=0}^{n-1}$, con $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

Si $A \subset \mathbb{K}^n$ es un conjunto afín algebraico, su *anillo de coordenadas* es $\mathbb{K}[A] = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/\mathcal{I}(A)$.

Si A es una variedad afín, entonces $\mathbb{K}[A]$ es un dominio entero y es de hecho una $\mathbb{K}$-álgebra generada finitamente. Recíprocamente, todo dominio entero que es una $\mathbb{K}$-álgebra generada finitamente es el anillo de coordenadas de una variedad afín.

Observación 2.2 *Si* $A_0, A_1 \subset \mathbb{K}^n$ *son dos variedades afines y* $\sigma : A_0 \to A_1$ *es una función polinomial entonces se puede definir la transformación* $\sigma^\star : \mathbb{K}[A_1] \to \mathbb{K}[A_0]$, *mediante* $[Q(\mathbf{X})] \mapsto [P(\mathbf{X})] = [Q \circ \sigma(\mathbf{X})]$, *la cual es de hecho un* $\mathbb{K}$*-homomorfismo de álgebras.*

Lema 2.1 *Se tiene que valen las relaciones siguientes:*

- *Un punto* $\mathbf{x} \in A$ *en una variedad determina un ideal maximal* $M_{\mathbf{x}} = \{[P(\mathbf{X})] \in \mathbb{K}[A] |\ P(\mathbf{x}) = 0\}$, *y todos los ideales maximales son de esta forma.*
- *Dos variedades afines son isomorfas si y sólo si los correspondientes anillos de coordenadas son isomorfos, vistos éstos como* $\mathbb{K}$*-álgebras.*

Sea $\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[A])$ la colección de ideales maximales en el anillo de coordenadas $\mathbb{K}[A]$. Se tiene por el primer punto del lema anterior que $A \approx \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[A])$.

Cada elemento $[P(\mathbf{X})] \in \mathbb{K}[A]$ del anillo de coordenadas determina una función $P : A \to \mathbb{K}$, por lo que en lo sucesivo denotaremos a los elementos del anillo de coordenadas como si fuesen meras funciones.

Para una $f \in \mathbb{K}[A]$ sea $A_f = \{\mathbf{x} \in A |\ f(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Entonces A_f es un abierto en la topología de Zariski. Sea $\mathbb{K}(A)$ el campo de fracciones de $\mathbb{K}[A]$ y sea $\mathbb{K}[A]_f = \{\frac{g}{f^\ell} |\ g \in \mathbb{K}(A)\ \&\ \ell \in \mathbb{N}\}$. Se tiene también que $A_f \approx \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[A]_f)$. Esta construcción es del tipo de *localización*.

Un espacio topológico X se dice ser *noetheriano* si se satisface en él la *condición de cadenas descendientes*: Toda cadena descendiente de conjuntos cerrados se estaciona a partir de un índice.

$\mathbb{K}^n$ es pues noetheriano con la topología de Zariski.

Proposición 2.2 *Si el espacio topológico* X *es noetheriano todo conjunto cerrado no vacío* Y *puede expresarse como la unión finita de conjuntos cerrados irreducibles* $(Y_j)_{j=0}^{k-1}$, $Y = \bigcup_{j=0}^{k-1} Y_j$, *que es única bajo la condición de que éstos no se contengan a pares:* $[j_0 \neq j_1 \Rightarrow Y_{j_0} \not\subset Y_{j_1}]$. *En tal caso, los conjuntos* Y_j *se dicen ser las* componentes cerradas irreducibles *de* Y.

Corolario 2.2 *Todo conjunto algebraico de* $\mathbb{K}^n$ *se expresa de manera única como una unión de variedades que no se contienen a pares.*

La *dimensión* de un espacio topológico es la longitud de cualquier cadena maximal creciente de conjuntos cerrados irreducibles en el espacio. La *dimensión* de una variedad es su dimensión vista como espacio topológico.

En un anillo, la *altura* de un ideal primo I es el supremo de las longitudes de cadenas crecientes de ideales primos distintos cuyo último elemento es I. La *dimensión de Krull* de un anillo es el supremo de las alturas de sus ideales primos.

Proposición 2.3 *Si* A *es un conjunto algebraico afín entonces su dimensión coincide con la dimensión de su anillo de coordenadas* $\mathbb{K}[A]$.

Teorema 2.2 *Sea* $\mathbb{K}$ *un campo, y sea* R *un dominio entero que es una* $\mathbb{K}$*-álgebra generada finitamente. Entonces:*

- *La dimensión de R es la de $\mathbb{K}[R]$.*
- *Para cualquier ideal primo $I < R$:* $\mathrm{altura}(I) + \dim(R/I) = \dim R$.

Se tiene $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Proposición 2.4 *Si A es una variedad cuasi-afín, entonces* $\dim A = \dim \overline{A}$.

Teorema 2.3 (*Hauptidealsatz* de Krull) *Sea R un anillo noetheriano. Entonces todo ideal minimal primo en él que contenga un elemento que ni es cero ni es una unidad tiene altura* 1.

Proposición 2.5 *Un dominio entero noetheriano es un dominio de factorización única si y sólo si todo ideal primo de altura* 1 *es principal.*

Proposición 2.6 *Una variedad A en $\mathbb{K}^n$ tiene dimensión $n-1$ si y sólo si existe un polinomio no-constante irreducible $P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ tal que $A = Z(P(\mathbf{X}))$.*

2.1.2 Normalidad y localización

Sea R un dominio entero con campo de fracciones $\mathbb{K}$. R es *normal* o *cerrado por enteros* si todo elemento entero en $\mathbb{K}$, es decir, raíz de un polinomio mónico en $R[X]$, es un elemento de R. Una variedad afín irreducible A es *normal* si su anillo de coordenadas $\mathbb{K}[A]$ lo es.

Si acaso A no fuese normal, su *normalización* A' es una variedad que se construye como sigue: sea $\mathbb{K}[A]' = \{f \in \mathbb{K}(A)|\ f \text{ es entero en } \mathbb{K}[A]\}$ la *cerradura por enteros* de $\mathbb{K}[A]$ y sea $A' = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[A]')$. Entonces la inclusión $\mathbb{K}[A] \subset \mathbb{K}[A]' = \mathbb{K}[A']$ corresponde a una inclusión $A' \subset A$, la que se dice ser la *función de normalización*.

Sea A una variedad irreducible y $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. El *anillo local* de A en $\mathbf{x}$ es $\mathcal{O}_{A,\mathbf{x}} = \{\frac{f}{g} \in \mathbb{K}(A)|\ g(\mathbf{x}) \neq 0\}$. En él, el conjunto $\mathcal{M}_{A,\mathbf{x}} = \{f \in \mathcal{O}_{A,\mathbf{x}}|\ f(\mathbf{x}) = 0\}$ es un ideal maximal, y de hecho es el único maximal ahí, por lo que el anillo local es, en efecto, un anillo local.

El *espacio tangente de Zariski* de A en $\mathbf{x}$ es $T_{\mathbf{x}}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{A,\mathbf{x}}/\mathcal{M}^2_{A,\mathbf{x}}, \mathbb{K})$, o sea el dual del cociente $\mathcal{M}_{A,\mathbf{x}}/\mathcal{M}^2_{A,\mathbf{x}}$.

Lema 2.2 *Sea $A \subset \mathbb{K}^n$ una variedad afín y $\mathbf{x} \in A$. Supóngase que $\mathcal{I}(A) = \left\langle (P_i(\mathbf{X}))_{i=0}^{m-1} \right\rangle$ está generado por m polinomios en $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$. Para cada $i \in [\![0, m-1]\!]$ sea $d_{\mathbf{x}}(P_i) = \sum_{j=0}^{n-1} \partial_{X_j} P_i(\mathbf{x}) X_j$. Entonces el espacio tangente $T_{\mathbf{x}}(A)$ es isomorfo al subespacio de $\mathbb{K}^n$ determinado por las ecuaciones $d_{\mathbf{x}}(P_i) = 0$, $i \in [\![0, m-1]\!]$. Se tendrá, en consecuencia,* $\dim T_{\mathbf{x}}(A) \leq n$.

El punto $\mathbf{x}$ en A se dice ser *suave* o *no-singular* si $\dim T_{\mathbf{x}}(A)$ coincide con el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles de A que contienen a $\mathbf{x}$. Si no es suave, el punto $\mathbf{x}$ es *singular*. La variedad A es *suave* si todo punto suyo lo es.

Proposición 2.7 *Toda variedad A afín irreducible es normal.*

2.1.3 Producto de variedades afines

Sean $A_0 \subset \mathbb{K}^{n_0}$ y $A_1 \subset \mathbb{K}^{n_1}$ dos variedades afines en sendos espacios. Ya que $\mathbb{K}^{n_0} \approx \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\mathbf{X}_{n_0}])$ y $\mathbb{K}^{n_1} \approx \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\mathbf{X}_{n_1}])$, donde $\mathbf{X}_{n_0} = (X_{0j})_{j=0}^{n_0-1}$ y $\mathbf{X}_{n_1} = (X_{1j})_{j=0}^{n_1-1}$ son conjuntos de n_0 y n_1 indeterminadas, se tiene $\mathcal{I}(A_0) = \left\langle (P_{0i}(\mathbf{X}_{n_0}))_{i=0}^{m_0-1} \right\rangle$ e $\mathcal{I}(A_1) = \left\langle (P_{1i}(\mathbf{X}_{n_1}))_{i=0}^{m_1-1} \right\rangle$ son ideales finitamente generados. Por tanto el producto cartesiano $A_0 \times A_1 = \mathcal{Z}\left((P_{0i}(\mathbf{X}_{n_0}))_{i=0}^{m_0-1} \cup (P_{1i}(\mathbf{X}_{n_1}))_{i=0}^{m_1-1} \right) \subset \mathbb{K}^{n_0+n_1}$ es una variedad.

Alternativamente, el producto $A_0 \times A_1$ puede caracterizarse mediante la siguiente *Propiedad Universal del Producto de Variedades*:

Si $\phi_0 : W \to A_0$ y $\phi_1 : W \to A_1$ son funciones polinomiales entre variedades entonces existe una única función $\nu : W \to A_0 \times A_1$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "\nu"] \arrow[drr, bend left, "\phi_0"] \arrow[ddr, bend right, "\phi_1"'] & & \\
& A_0 \times A_1 \arrow[r, "\pi_0"'] \arrow[d, "\pi_1"] & A_0 \\
& A_1 &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

De forma correspondiente, se tiene la siguiente *Propiedad Universal de Anillos de Coordenadas del Producto de Variedades*:

Si $\phi_0^\star : \mathbb{K}[A_0] \to \mathbb{K}[W]$ y $\phi_1^\star : \mathbb{K}[A_1] \to \mathbb{K}[W]$ son homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras entonces existe un único homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\nu^\star : \mathbb{K}[A_0 \times A_1] \to \mathbb{K}[W]$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K}[A_1] \arrow[d, "\pi_1^\star"'] \arrow[ddr, bend left, "\phi_1^\star"] & \\
\mathbb{K}[A_0] \arrow[r, "\pi_0^\star"] \arrow[drr, bend right, "\phi_0^\star"'] & \mathbb{K}[A_0 \times A_1] \arrow[dr, dotted, "\nu^\star"] & \\
& & \mathbb{K}[W]
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Atendiendo a los conceptos vistos en la sección 1.2.2, resulta la siguiente:

Proposición 2.8 $\mathbb{K}[A_0] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[A_1] = \mathbb{K}[A_0 \times A_1]$.

2.1.4 Producto fibrado de variedades

Proposición 2.9 *Una $\mathbb{K}$-álgebra R es isomorfa al anillo de coordenadas de una variedad afín si y sólo si R es finitamente generada y* su cero es el único elemento nilpotente *en R, es decir:*

$$\forall f \in R : \left[\left(\exists \ell \in \mathbb{N} : \; f^\ell = 0 \right) \implies f = 0 \right].$$

Si X, Y, S son tres conjuntos no-vacíos y $f_X : X \to S$, $f_Y : Y \to S$ son dos funciones, se define el *producto de fibra*:

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y | \; f_X(x) = f_Y(y)\}.$$

Las siguientes propiedades son inmediatas:

- $S = \{s\} \implies X \times_S Y = X \times Y.$
- $X, Y \subset S$ & f_X, f_Y son las inclusiones $\implies X \times_S Y \approx X \cap Y.$
- $Y = \{s\} \subseteq S \implies X \times_S Y \approx f_X^{-1}(s).$

Se tiene que vale la siguiente *Propiedad Universal de Producto de Fibra*:

Si $\phi_X : W \to X$ y $\phi_Y : W \to Y$ son funciones tales que $f_X \circ \phi_X = f_Y \circ \phi_Y$ entonces existe una única función $\nu : W \to X \times_S Y$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "\nu"] \arrow[drr, bend left, "\phi_X"] \arrow[ddr, bend right, "\phi_Y"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "\pi_X"'] \arrow[d, "\pi_Y"] & X \arrow[d, "f_X"'] \\
& Y \arrow[r, "f_Y"] & S
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Ya que $X \times_S Y = (f_X, f_Y)^{-1}(\mathrm{diag}_S)$, donde $\mathrm{diag}_S \subset S^2$ es la diagonal de S^2, se tiene que $X \times_S Y$ adquiere una estructura natural de variedad inducida por la de S^2.

Ahora, recordamos que para tres variedades X, Y y S ocurre $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[X])$, $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[Y])$ y $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[S])$. Supongamos que $f_X^\star : \mathbb{K}[S] \to \mathbb{K}[X]$ y $f_Y^\star : \mathbb{K}[S] \to \mathbb{K}[Y]$ son dos homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras (de hecho, se tiene asociadas correspondientes funciones $f_X : X \to S$ y $f_Y : Y \to S$ según la observación 2.2) y consideremos el producto $\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}[S]} \mathbb{K}[Y]$, que es en sí una $\mathbb{K}[S]$-álgebra. En ella, consideremos su ideal N consistente de sus elementos nilpotentes (alguna potencia de cada uno de ellos se anula). Entonces el cociente $(\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}[S]} \mathbb{K}[Y])/N$ es un anillo de coordenadas y, necesariamente, se ha de tener $X \times_S Y = \mathrm{Spec}\left((\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}[S]} \mathbb{K}[Y])/N\right)$.

2.1.5 Conjuntos algebraicos sobre el campo de los complejos

Para un conjunto de polinomios $\mathcal{P} = \{P_0(\mathbf{X}), \ldots, P_{k-1}(\mathbf{X})\} \subset \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ sea

$$Z(\mathcal{P}) = \bigcap_{\kappa=0}^{k-1} P_\kappa^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{C}^n |\ \forall \kappa \in [\![0, k-1]\!] :\ P_\kappa(x) = 0\}$$

el *conjunto algebraico afín* determinado por $\mathcal{P}$, y sea $\mathcal{I}(\mathcal{P}) = (\mathcal{P})$ el ideal generado por $\mathcal{P}$ en $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$. Se tiene $Z(\mathcal{I}(\mathcal{P})) = Z(\mathcal{P})$.

Para un conjunto $A \subset \mathbb{C}^n$, el *ideal anulador* de A es $\mathcal{I}(A) = \{P(\mathbf{X}) \in \mathbb{C}[\mathbf{X}] |\ \forall x \in A :\ P(x) = 0\}$.

Para un punto $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, consideremos la familia de polinomios $\mathcal{P}_\mathbf{x} = (X_j - x_j)_{j=0}^{n-1}$. Entonces $Z(\mathcal{P}_\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$, $\mathcal{I}(\mathcal{P}_\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{C}[\mathbf{X}](X_j - x_j)$, y éste es un ideal maximal. Se escribe $\mathcal{M}_\mathbf{x} = \mathcal{I}(\mathcal{P}_\mathbf{x})$.

Sea $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbf{X}])$ la colección de ideales maximales en $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ y sea $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbf{X}])$, $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{M}_\mathbf{x}$.

Proposición 2.10 (Versión débil del *Nullstellensatz*) *Todo ideal maximal de* $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ *es de la forma* $\mathcal{M}_\mathbf{x}$ *para algún* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. *De hecho* ψ *es una biyección.*

Para un ideal $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ sea $Z(\mathcal{I}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n |\ \mathcal{I} \subset \mathcal{M}_\mathbf{x}\}$ el *conjunto algebraico afín* determinado por $\mathcal{I}$. Se denota por $\mathcal{I}_Z = \mathcal{I}(Z(\mathcal{I}))$ al ideal anulador del conjunto algebraico afín determinado por $\mathcal{I}$. El cociente $\mathbb{C}[Z] = \mathbb{C}[\mathbf{X}]/\mathcal{I}_Z$ se llama el *anillo de coordenadas* del conjunto afín $Z(\mathcal{I})$. Como una $\mathbb{C}$-álgebra, $\mathbb{C}[Z]$ está generada por las clases $\overline{X}_j = X_j + \mathcal{I}_Z$ de las funciones "coordenadas" X_j, $j \in [\![0, n-1]\!]$.

Proposición 2.11 *Hay una correspondencia biyectiva entre* Z *y* $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[Z]) = \{$*ideales maximales de* $\mathbb{C}[Z]\}$. *Con la topología de Zariski, ambos espacios son homeomorfos.*

2.2 Variedades proyectivas

2.2.1 Espacios proyectivos

Sea $\mathbb{K}$ un campo y sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea $\mathrm{L}(V)$ la clase de automorfismos lineales en V, $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{L}(V)$ la de los invertibles, y $\mathrm{SL}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ la de los que tienen determinante 1. Cuando el campo es el de los complejos, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathrm{U}(V)$ es el grupo de automorfismos lineales hermitianos, y $\mathrm{SU}(V) \subset \mathrm{U}(V)$ el de aquellos con determinante 1.

En $V - \{\mathbf{0}\}$ se define la relación: $[\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists a \in \mathbb{K}^* :\ \mathbf{y} = a\mathbf{x}]$. Se tiene entonces $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ cuando y sólo cuando la matriz $[\mathbf{x}\ \ \mathbf{y}]$ es de rango a lo sumo 1. El *espacio proyectivo* es el cociente $\mathbb{P}(V) = (V - \{\mathbf{0}\})/\sim$.

Cuando $V = \mathbb{K}^{n+1}$, entonces $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ es el *espacio proyectivo de dimensión* n *sobre el campo* $\mathbb{K}$.

Sea $D = (d_{ij})_{(i,j)\in[\![0,m-1]\!]\times[\![0,n-1]\!]} \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ una matriz de orden $m \times n$ con entradas en $\mathbb{Z}$. Dada una colección $\mathbf{X} = \{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$ de n variables formales, la colección de *monomios de Laurent* determinada por D es $M_D = \left\{\mathbf{X}^{\mathbf{d}_i} = \prod_{j=0}^{n-1} X^{d_{ij}}\right\}_{i=0}^{m-1}$. El conjunto afín *parametrizado* por D es $P_D = \left\{\left(\mathbf{x}^{\mathbf{d}_0}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{d}_{m-1}}\right) \in \mathbb{K}^m |\ \mathbf{x} \in (\mathbb{K}^*)^n\right\}$, pero, de hecho, debido a la homogeneidad de los polinomios de Laurent, el conjunto parametrizado puede considerarse como un subconjunto del espacio proyectivo de dimensión $m-1$, $P_D \subset \mathbb{P}^{m-1}$.

Un *conjunto tórico algebraico* es un conjunto $P \subset \mathbb{P}^{m-1}$ tal que existe una matriz $D \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ para la cual $P = P_D$.

Para cada $d \in \mathbb{N}$ sea $\mathbb{K}[\mathbf{X}]_d$ la colección de polinomios homogéneos de grado d. Entonces $\oplus_{d=0}^{+\infty}\mathbb{K}[\mathbf{X}]_d$ es una graduación del anillo $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$.

Sea $I(P_D) \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ el ideal generado por los polinomios homogéneos que se anulan en P_D, llamado *ideal anulador* de P_D. Se verá algunas propiedades estructurales del ideal $I(P_D)$.

Recordamos que en un anillo R, para un ideal $I \subset R$, su *radical* es $\mathrm{rad}(I) = \{x \in R | \ \exists n \in \mathbb{Z}^+ : \ x^n \in I\}$, que en sí es un ideal, y el ideal I es *radical* si $I = \mathrm{rad}(I)$.

Pues bien, puede verse que $I(P_D)$ es un ideal radical.

2.2.2 Variedades algebraicas proyectivas

Sea R un anillo. Una *graduación* en R es una descomposición $R = \bigoplus_{d\geq 0} R_d$ como una suma directa de subgrupos abelianos (aditivos) tal que $\forall d, e \in \mathbb{N}$, $R_d \cdot R_e \subseteq R_{d+e}$. Los elementos de cada *grado* R_d se dicen ser *homogéneos de grado* d. En consecuencia, todo elemento en R se expresa como una suma de elementos homogéneos. Un ideal $I < R$ es *homogéneo* si $I = \bigoplus_{d\geq 0}(I \cap R_d)$. Así pues, un ideal es homogéneo si y sólo si está generado por elementos homogéneos. La suma, el producto, la intersección y el radical de ideales homogéneos son homogéneos. Más aún, un ideal homogéneo es primo cuando y sólo cuando para cualesquiera dos elementos $x, y \in I$ homogéneos rige la implicación: $[xy \in I \implies x \in I \vee y \in I]$.

Sea $\mathbb{K}$ un campo, sea $\mathbb{P}^n$ el cociente de $\mathbb{K}^{n+1}$ partido por la relación de equivalencia: $[\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff \exists t \in \mathbb{K}^* : \ \mathbf{b} = t\mathbf{a}]$. $\mathbb{P}^n$ es el *espacio proyectivo*.

Si $\mathbf{X}$ es un conjunto de $(n+1)$ indeterminadas, $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ es un anillo graduado, tomando $\mathbb{K}[\mathbf{X}]_d$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de monomios de peso d, para cada $d \in \mathbb{N}$.

Si $P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]_d$ es un polinomio homogéneo, entonces puede ser visto naturalmente como una transformación $\mathbb{P}^n \to \mathbb{K}$ y su conjunto proyectivo de ceros es $Z(P(\mathbf{X})) = \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^n | \ P(\mathbf{x}) = 0\}$.

Las nociones vistas para variedades algebraicas se trasladan al espacio proyectivo, considerando polinomios homogéneos. Por ejemplo, si $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ es una colección de polinomios homogéneos se define $Z(\mathcal{P}) = \bigcap\{Z(P(\mathbf{X}))| \ P(\mathbf{X}) \in \mathcal{P}\}$. Como $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ es noetheriano, existe un conjunto finito de polinomios $\{P_j(\mathbf{X})\}_{j=0}^{k-1}$ tal que $Z(\mathcal{P}) = \bigcap_{j=0}^{k-1} Z(P_j(\mathbf{X}))$. Los conjuntos *algebraicos* en $\mathbb{P}^n$ son los ceros de polinomios homogéneos, y la topología de Zariski consiste de los complementos de algebraicos. Las *variedades proyectivas* son los conjuntos cerrados irreducibles, y las *variedades cuasi-proyectivas* son los abiertos de variedades proyectivas. Para un conjunto $A \subset \mathbb{P}^n$ su *ideal homogéneo* $\mathcal{I}_H(A)$ es el ideal de $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ generado por los polinomios homogéneos que se anulan en A y el *anillo de coordenadas homogéneas* es $\mathbb{K}[\mathbf{X}]/\mathcal{I}_H(A)$.

Si $P(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]_1$ es un polinomio lineal homogéneo, su conjunto de ceros $Z(\mathcal{P})$ en $\mathbb{P}^n$ se dice ser un *hiperplano* proyectivo. Para cada $i \in [\![0, n]\!]$ sea $H_i = Z(X_i)$ y sea $U_i = \mathbb{P}^n - H_i$ su complemento. Entonces $(U_i)_{i=0}^n$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{P}^n$. Para cada $i \in [\![0, n]\!]$ sea $\sigma_i : U_i \to \mathbb{K}^n$, $[\mathbf{x}] \mapsto \left(\frac{x_j}{x_i}\right)_{j\neq i}$. Se tiene que, respecto a las topologías de Zariski, σ_i es un homeomorfismo.

Proposición 2.12 *Si $A \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva, entonces queda recubierta por los abiertos relativos $A \cap U_i$ los cuales son isomorfos a variedades afines a través de σ_i.*

2.3 Morfismos entre variedades

Sea $\mathbb{K}$ un campo y V una variedad, dotada de la topología de Zariski. Una función $f : V \to \mathbb{K}$ es *regular en un punto* $\mathbf{x} \in V$ si existe una vecindad abierta $U \subset V$ de $\mathbf{x}$ y polinomios $P(\mathbf{X}), Q(\mathbf{X}) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ tales que $f|_U = \frac{P}{Q}$ (si la variedad es proyectiva, los polinomios $P(\mathbf{X}), Q(\mathbf{X})$ han de ser homogéneos). La función f es *regular* si lo es en todo punto de la variedad.

Sean V, W dos variedades. Un *morfismo* es una función contínua $\phi : V \to W$ tal que para cualquier función regular $f : W \to \mathbb{K}$ y cualquier abierto $U \subset W$, se tiene que $f \circ \phi : \phi^{-1}(U) \to \mathbb{K}$ es regular.

Dos variedades V, W son *isomorfas* si existen dos morfismos $\phi : V \to W$ y $\psi : W \to V$ tales que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ y $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$.

La colección de variedades con morfismos conforma la *categoría de variedades*.

Sea $\mathbb{K}[V]$ el anillo de coordenadas de la variedad V y sea $\mathbb{K}(V)$ su campo de fracciones. Para un punto $\mathbf{x} \in V$ sea $\mathcal{O}_{V,\mathbf{x}}$ el anillo de funciones en $\mathbb{K}(V)$ que están definidas en $\mathbf{x}$, llamado *anillo local en* $\mathbf{x}$. Para un abierto $U \subset V$, sea $\mathcal{O}_V(U)$ el anillo de funciones en $\mathbb{K}(V)$ que son regulares en U.

Si $\phi : V \to W$ es un morfismo entonces para cada abierto $U \subset W$ se tiene $\phi^* : \mathcal{O}_W(U) \to \mathcal{O}_V(\phi^{-1}(U))$, $f \mapsto f \circ \phi$, y también para cada $\mathbf{x} \in V$, $\phi^*_{\mathbf{x}} : \mathcal{O}_{W,\phi(\mathbf{x})} \to \mathcal{O}_{V,\mathbf{x}}$.

Proposición 2.13 *Las siguientes asevraciones son verdaderas:*

- *Las funciones regulares en toda una variedad son las constantes.*
- *El campo de funciones de una variedad proyectiva consta de los cocientes de polinomios homogéneos de un mismo grado.*
- *La colección de morfismos $V \to W$ se puede poner en correspondencia biunívoca con la colección de homomorfismos $\mathbb{K}(W) \to \mathcal{O}_V(V)$.*
- $\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{K}[W], \mathbb{K}[V])$.

2.4 Curvas afines y proyectivas

Seguiremos aquí la exposición en [4].

Sea $\mathbb{K}$ un campo. Una *curva algebraica afín* es de la forma $Z(P(X_0, X_1))$, en la cerradura algebraica $\overline{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$, para algún polinomio $P(X_0, X_1) \in \mathbb{K}[X_0, X_1]$:

$$Z(P(X_0, X_1)) = \{(x_0, x_1) \in \overline{\mathbb{K}}|\ P(x_0, x_1) = 0\}.$$

Si $\mathbb{K} < \mathbb{K}_1 < \overline{\mathbb{K}}$, todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{K}_1^2 \cap Z(P(X_0, X_1))$ se dice ser un punto $\mathbb{K}_1$-*racional.* Una *curva algebraica proyectiva* es de la forma $Z(Q(X_0, X_1, X_2))$ para algún polinomio homogéneo $Q(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$. De acuerdo con la proposición 2.12, una curva proyectiva, digamos $Q(X_0, X_1, X_2) = 0$ determina tres curvas afines, por un proceso de *deshomogenización*:

$$Q(X_0, X_1, 1) = 0 \quad , \quad Q(X_0, 1, X_2) = 0 \quad , \quad Q(1, X_1, X_2) = 0.$$

En tanto que una curva afín, digamos $P(X_0, X_1) = 0$ determina, por un proceso de *homogenización*, la curva proyectiva $Q(X_0, X_1, X_2) = 0$, con $Q(X_0, X_1, X_2) = X_2^d P\left(\frac{X_0}{X_2}, \frac{X_1}{X_2}\right)$, donde d es el grado de $P(X_0, X_1)$.

Por ejemplo, la curva afín $X_1^2 - X_0^2(X_0+1) = 0$ queda asociada a la curva proyectiva $X_1^2X_2 - X_0^3 - X_0^2X_2 = 0$ y la curva proyectiva $X_0^5 + X_1^5 - X_2^5 = 0$ queda asociada con la curva afín $X_0^5 + X_1^5 - 1 = 0$.

Una curva es *irreducible* si el polinomio que la representa no se factoriza como producto de polinomios no triviales. Mediante la transformación $Z(Q(X_0, X_1, X_2)) \mapsto Z(Q(X_0, X_1, 1))$ se tiene una correspondencia entre las curvas irreducibles proyectivas y las curvas irreducibles afines.

Un punto $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$ en la curva proyectiva $Z(Q(X_0, X_1, X_2))$ es *singular* si $\partial_{X_0}Q(x_0, x_1, x_2) = \partial_{X_1}Q(x_0, x_1, x_2) = \partial_{X_2}Q(x_0, x_1, x_2) = 0$. Si el punto no es singular se dice ser *simple.* La curva $Z(Q(X_0, X_1, X_2))$ es *suave* si todos sus puntos son simples.

Curva hermitiana. Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{q^2}$ donde $q = p^m$ es una potencia de un primo. Sea $Q(X_0, X_1, X_2) = X_1^qX_2 + X_1X_2^q - X_0^{q+1}$, entonces, como la característica del campo divide a q, se tiene $\partial_{X_0}Q(x_0, x_1, x_2) = x_0^q$, $\partial_{X_1}Q(x_0, x_1, x_2) = x_2^q$ y $\partial_{X_2}Q(x_0, x_1, x_2) = x_1^q$. En consecuencia la curva proyectiva $Z(Q(X_0, X_1, X_2))$ es suave.

En lo que sigue, *curva* se referirá siempre a *curva proyectiva suave.*

Sea $Q(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ un polinomio irreducible y sea $\mathrm{Q} = Z(Q(X_0, X_1, X_2))$ la curva que define. Sea $I = (Q(X_0, X_1, X_2))$ el ideal generado por $Q(X_0, X_1, X_2)$ en el anillo $\mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$, entonces I es primo y el cociente $\mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]/I$ es un dominio entero. Si $R(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ es un polinomio homogéneo de grado d, se dice que el elemento $R(X_0, X_1, X_2) + I \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]/I$ es una *forma de grado d.* La colección de *formas racionales* sobre la curva Q es

$$\mathbb{K}(\mathrm{Q}) = \left\{\frac{g}{h}|\ g, h \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]/I \text{ son formas del mismo grado y } h \neq 0\right\}.$$

Una forma racional $f \in \mathbb{K}(\mathrm{Q})$ *está definida* en un punto $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$ de la curva si existen dos polinomios $A(X_0, X_1, X_2), B(X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ tales que $B(\mathbf{a}) \neq 0$ y $f(\mathbf{a}) = \frac{A(\mathbf{a})}{B(\mathbf{a})}$. Sea $O_{\mathbf{a}}$ el anillo de funciones racionales definidas en $\mathbf{a}$. Se tiene que $O_{\mathbf{a}}$ es un dominio entero y, de hecho, su campo de fracciones es precisamente $\mathbb{K}(\mathrm{Q})$. Sea $M_{\mathbf{a}} = \{f \in O_{\mathbf{a}}|\ f(\mathbf{a}) = 0\}$. Entonces $M_{\mathbf{a}}$ es un ideal principal. Cualquier generador de él se dice ser un *parámetro local* en $\mathbf{a}$.

Proposición 2.14 *Supóngase que* $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2] \in \mathrm{Q}$*, con* $a_2 \neq 0$*, es un punto de la curva determinada como* $\mathrm{Q} = Z(Q(X_0, X_1, X_2))$*. Si* $t = \frac{A(X_0,X_1,X_2)}{B(X_0,X_1,X_2)} \in M_{\mathbf{a}}$ *donde* $\mathrm{gr}(A(X_0, X_1, X_2)) = \mathrm{gr}(B(X_0, X_1, X_2)) = 1$, $B(\mathbf{a}) \neq 0$ *y* $A(X_0, X_1, X_2)$ *no es un múltiplo de* $\partial_{X_0}Q(\mathbf{a})\,X_0 + \partial_{X_1}Q(\mathbf{a})\,X_1 + \partial_{X_2}Q(\mathbf{a})\,X_2$*, entonces* t *es un parámetro local en* $\mathbf{a}$.

Sea $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$ y $t \in M_{\mathbf{a}}$ un parámetro local en $\mathbf{a}$. Sea $f \in \mathbb{K}(\mathrm{Q})$ una función racional tal que $f \neq 0$. Entonces existen $m \in \mathbb{Z}$ y $u \in O_{\mathbf{a}} - M_{\mathbf{a}}$ tales que $f = t^m u$. El entero m se dice ser la *valuación* de f en $\mathbf{a}$ y se escribe $v_{\mathbf{a}}(f) = m$. Se tiene que $O_{\mathbf{a}}$ consiste de las funciones racionales con valuación no-negativa y $M_{\mathbf{a}}$ de las racionales con valuación positiva.

Proposición 2.15 *Para todo punto* $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$*, la valuación* $v_{\mathbf{a}}$ *satisface las condiciones siguientes:*

1. $\forall f, g \in \mathbb{K}(\mathrm{Q}) :\ v_{\mathbf{a}}(fg) = v_{\mathbf{a}}(f) + v_{\mathbf{a}}(g)$. *En consecuencia,* $\forall r \in \mathbb{Z} :\ v_{\mathbf{a}}(f^r) = r\, v_{\mathbf{a}}(f)$.
2. $\forall f, g \in \mathbb{K}(\mathrm{Q}) :\ v_{\mathbf{a}}(f + g) \geq \min\{v_{\mathbf{a}}(f), v_{\mathbf{a}}(g)\}$. *La igualdad vale toda vez que* $v_{\mathbf{a}}(f) \neq v_{\mathbf{a}}(g)$.
3. $\forall b \in \mathbb{K} :\ v_{\mathbf{a}}(b) = 0$.

Si $v_{\mathbf{a}}(f) > 0$ entonces $\mathbf{a}$ es un *cero de multiplicidad* $v_{\mathbf{a}}(f)$ de f. Si $v_{\mathbf{a}}(f) < 0$ entonces $\mathbf{a}$ es un *polo de multiplicidad* $-v_{\mathbf{a}}(f)$ de f.

Teorema 2.4 *Cualquier función racional tiene el mismo número de ceros que de polos (contados con multiplicidades).*

3 Variedades tóricas

Seguiremos aquí la presentación en [7].

3.1 Conos

Dados r vectores $x_0, \ldots, x_{r-1} \in \mathbb{R}^n$ su *cono poliédrico* consiste de todas las combinaciones lineales de esos vectores con coeficientes no-negativos,

$$C(x_0, \ldots, x_{r-1}) = \{\sum_{j=0}^{r-1} a_j\, x_j|\ \forall j :\ a_j \geq 0\},$$

del cual los vectores $x_0, \ldots, x_{r-1}$ se dicen ser *generadores*. La mónada $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ es el cono generado por el conjunto vacío. La *dimensión* del cono $C(x_0, \ldots, x_{r-1})$ es la del mínimo espacio lineal que lo contiene.

Un cono $C = C(x_0, \ldots, x_{r-1})$ es *fuertemente convexo* si $C \cap (-C) = \{0\}\}$.

Sea $R_n \subset \mathbb{R}^n$ un retículo, $R_n \approx \mathbb{Z}^n$. Un *cono reticular* es un cono cuyos generadores están en R_n.

Sea $\mathbb{R}^{n\star}$ el dual de $\mathbb{R}^n$, y sea $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathbb{R}^{n\star} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la *evaluación* de funcionales lineales. Para un cono $C = C(x_0, \ldots, x_{r-1})$, su *cono dual* es $\check{C} = \{f \in \mathbb{R}^{n\star}|\ \forall x \in C :\ \langle f|x\rangle \geq 0\}$.

Para el retículo R_n se tiene que su dual $R_n^\star = \mathrm{Hom}_Z(R_n, \mathbb{Z})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ y se identifica naturalmente con un subconjunto de $\mathbb{R}^{n\star}$.

Se tiene que si C es un cono poliédrico, su dual $\check{C}$ también lo es. Si C es un cono reticular, su dual $\check{C}$ también lo es.

Lema 3.1 *Si* $C = C(x_0, \ldots, x_{r-1})$ *es reticular, entonces* $\check{C} = \bigcap_{j=0}^{r-1} \check{C}(x_j)$.

Sea $f \in \check{C} \cap R_n^\star$. El conjunto $\gamma_f = C \cap f^\perp = \{x \in C|\ \langle f|x\rangle = 0\}$ se dice ser una *cara* de C. Se escribe $\gamma_f < C$. El cono C es una cara de sí mismo (basta considerar $f = 0$). Las caras de dimensión 1 se llaman *aristas*. Se tiene que toda cara de un cono poliédrico es también un cono poliédrico, la intersección de dos caras es una cara y toda cara de una cara es una cara.

Proposición 3.1 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

- $\gamma < C \implies \check{C} \subset \check{\gamma}$.
- $C = C_0 + C_1 \implies \check{C} = \check{C}_0 \cap \check{C}_1$.
- $\gamma_f = C \cap f^\perp \implies \check{\gamma}_f = \check{C} + \mathbb{R}^+(-f)$.

El *interior* de un cono C consta de todas las combinaciones lineales de $\dim(C)$ generadores, con coeficientes estrictamente positivos.

Proposición 3.2 *Si $\gamma < C$ entonces $\check{C} \cap \gamma^\perp$ es una cara de $\check{C}$ tal que* $\dim(\gamma) + \dim(\check{C} \cap \gamma^\perp) = n$. *Esto determina una correspondencia entre las caras de C y las de $\check{C}$.*

Lema 3.2 *Si C es un cono, entonces $C \cap R_n$ es un monoide.*

Lema 3.3 (Gordon) *Si C es un cono reticular, entonces $C \cap R_n$ es un monoide finitamente generado.*

Proposición 3.3 *Sea C un cono reticular y $\gamma_f = C \cap f^\perp$ una cara de C, con $f \in \check{C} \cap R_n^\star$. Entonces, $(\check{\gamma}_f \cap R_n^\star) = (\check{C} \cap R_n^\star) + \mathbb{Z}^+(-f)$.*

3.2 Abanicos

Sea $M \cong \mathbb{Z}^n$ un retículo y sea $M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ su retículo dual. Se tiene pues una transformación bilineal $\langle\cdot|\cdot\rangle : M^* \times M \to \mathbb{Z}$. Extendiendo los retículos a $\mathbb{R}$, se tiene una transformación bilineal $\langle\cdot|\cdot\rangle : (M^* \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}) \times (M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}) \to \mathbb{Z}$.

Un *cono poliédrico racional fuertemente convexo* es un conjunto $C \subset M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ tal que

- es un cono: $[\mathbf{x} \in C\,,\, r \in \mathbb{R}^+ \implies r\mathbf{x} \in C]$,
- es un poliedro, es decir, la intersección de un número finito de semiespacios,
- es racional, es decir, los semiespacios que lo determinan a su vez están determinados por ecuaciones polinomiales con coeficientes en $\mathbb{Q}$,
- y es fuertemente convexo, es decir, el único espacio lineal que contiene es la mónada que consta del origen.

El *dual* del cono C es $\check{C} = \{\mathbf{y} \in M^* |\ \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{0}\ ,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}$. Una *cara* de C es de la forma $C \cap \mathbf{y}^\perp$ para alguna $\mathbf{y} \in \check{C}$.

Un *abanico* (*fan*) en M es una colección finita $\mathcal{F}$ de poliedros racionales fuertemente convexos tal que

- toda cara de un cono en $\mathcal{F}$ es un cono en $\mathcal{F}$, y
- la intersección de cualesquiera dos conos en $\mathcal{F}$ es una cara de cada uno de esos conos.

El *soporte del abanico* es $\mathrm{Spt}(\mathcal{F}) = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C$. Un abanico puede verse como una descomposición de $M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ por poliedros racionales fuertemente convexos.

Para un cono $C \in \mathcal{F}$ sea $S_C = M^* \cap C^\perp = \{\mathbf{y} \in M^* |\ \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle = 0\,,\, \forall \mathbf{x} \in C\}$.

Proposición 3.4 *Con las notaciones anteriores:*

- *S_C es un semigrupo. Es decir $\mathbf{0} \in S_C$ y $[\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in S_C \ \Rightarrow\ \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 \in S_C]$.*
- *S_C es finitamente generado: $\exists \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{k-1} \in M^*$, $S_C = \left\{\sum_{\kappa=0}^{k-1} z_\kappa \mathbf{y}_\kappa |\ (z_\kappa)_{\kappa=0}^{k-1} \in (\mathbb{Z}^+)^k\right\}$.*
- *S_C genera a M^* como un grupo: $S_C + (-S_C) = M^*$.*
- *S_C es* saturado*: $\forall \mathbf{y} \in M^*\ ,\ z \in \mathbb{Z}^+\, [z\mathbf{y} \in S_C \ \Rightarrow\ \mathbf{y} \in S_C]$.*

Viceversa, todo subgrupo $S < M^*$ que cumple con las propiedades anteriores es de la forma $S = S_C$ para algún cono $C \subset M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ poliédrico racional fuertemente convexo.

3.3 Variedades tóricas

Un *grupo algebraico* es una variedad proyectiva tal que su producto $\cdot : G \times G \to G$ y su inversa $\cdot^{-1} : G \to G$ son sendos morfismos.

Por ejemplo, si $\mathbb{K}$ es un campo y $n \geq 1$, el grupo $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es algebraico, pues es una variedad en $\mathbb{K}^{n\times n}$, la imagen inversa de $\mathbb{K}-\{0\}$ bajo la función de determinante, y además las operaciones son morfismos.

Un *grupo lineal algebraico* es un grupo algebraico G que es en sí una variedad afín.

Una *variedad abeliana* es un grupo algebraico que es una variedad proyectiva y conexa.

El producto de grupos algebraicos es un grupo algebraico.

Las operaciones de un grupo algebraico definen homomorfismos en el anillo de coordenadas $\mathbb{K}[G] \to \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G]$ y $\mathbb{K}[G] \to \mathbb{K}[G]$.

Sean $G_{\cdot} = \mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$ y $G_+ < \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ el subgrupo correspondiente a las matrices triangulares superiores con 1 en la diagonal. Se tiene que $G_{\cdot}$ es el grupo multiplicativo de $\mathbb{K}$ y G_+ su grupo aditivo. Para cada $k \geq 1$, el grupo algebraico $G_{\cdot}^k$ es un *toro*.

Sean A una variedad, G un grupo algebraico y $\pi : G \times A \to A$ una acción de grupo. Se dice que π es *algebraica* si es un morfismo.

Una variedad proyectiva A es una *variedad tórica* si es irreducible, normal y posee un subconjunto U abierto, denso, isomorfo a un toro tal que la acción natural de U sobre sí mismo se extiende a A.

Sean G y H dos grupos algebraicos y A, B sendas variedades sobre las que actúan G y H respectivamente. Sea $\rho : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Un morfismo $\phi : A \to B$ se dice *ρ-equivariante* si conmuta con las acciones de G y H, es decir: $\forall (g, a) \in G \times A : \quad \pi_B(\rho(g), \phi(a)) = \phi(\pi_A(g, a))$,

$$\begin{tikzcd} G \times A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "(\rho,\phi)"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ H \times B \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd} \tag{13}$$

Si A, B son variedades tóricas y G y H son los toros densos insertos entonces ϕ se dice ser un *morfismo tórico*.

Proposición 3.5 *Toda variedad tórica se puede poner en correspondencia biunívoca con un abanico, acaso bajo la acción de un elemento en* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$.

Sea $M = \mathbb{Z}^m$ el retículo de coordenadas enteras, el cual es un $\mathbb{Z}$-módulo, también de dimensión m. Se tiene que $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z}) = M^* \cong M$. Sea $\mathbb{T}_m = (\mathbb{C}^*)^m$ el toro algebraico de dimensión m, el cual es un grupo multiplicativo, y sea $\mathbb{T}_m^* = \mathrm{Hom}(M^*, \mathbb{C}^*) = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$.

Cada $\mathbf{x} \in M$ determina un *carácter* $\varepsilon(\mathbf{x}) : \mathbb{T}_m \to \mathbb{C}^*$, $\mathbf{z} \mapsto \varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{z}) = \prod_{\mu=0}^{m-1} z_\mu^{x_\mu}$. Naturalmente, se tiene $\varepsilon(\mathbf{0}) = 1$ y $\varepsilon(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = \varepsilon(\mathbf{x}_0) \cdot \varepsilon(\mathbf{x}_1)$. Así pues, ε es un homomorfismo de M al grupo de caracteres de $\mathbb{T}_m$.

También se tiene que cada punto $\mathbf{x} \in M$ determina una transformación $\gamma_{\mathbf{x}} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{T}_m^*$, $z \mapsto \gamma_{\mathbf{x}}(z)$, donde $\forall \mathbf{y} \in M^*$, $\langle \gamma_{\mathbf{x}}(z) | \mathbf{y} \rangle = z^{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}$. Aquí también $\gamma_{\mathbf{0}} = 1$ y $\gamma_{\mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1} = \gamma_{\mathbf{y}_0} \cdot \gamma_{\mathbf{y}_1}$. La imagen de $\gamma : \mathbf{x} \mapsto \gamma_{\mathbf{x}}$ se dice ser un *grupo uniparametrizado* (*one-parameter group*), entonces γ es en sí un homomorfismo de grupos.

Sea $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{m-1}$ una base de M y sea $\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}$ la correspondiente base dual del dual M^*. Entonces la transformación $T_m^* \to T_m$, $\phi \mapsto (\langle \phi | \mathbf{x}_i \rangle)_{i=0}^{m-1}$ es un isomorfismo de grupos.

Para cada $i \in [\![0, m-1]\!]$ sea $\phi_i = \varepsilon(\mathbf{x}_i)$. Entonces $(\phi_i)_{i=0}^{m-1}$ es un sistema de coordenadas para T_m^*.

Sea $S_C = \langle \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{p-1} \rangle_{\mathbb{Z}^+}$ un semigrupo finitamente generado, determinado por un cono poliédrico fuertemente convexo $C \subset M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Sea

$$U_C = \{\mathbf{u} : S_C \to \mathbb{C} |\ \mathbf{u}(\mathbf{0}) = 1 \ \&\ \mathbf{u}(\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1) = \mathbf{u}(\mathbf{z}_0) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{z}_1)\ ,\ \forall \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1 \in S_C\}.$$

Entonces U_C se identifica naturalmente con un subconjunto de $\mathbb{C}^p$.

Proposición 3.6 *Sea $C \subset M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ un cono poliédrico fuertemente convexo, entonces su dual $\check{C}$ es un cono poliédrico fuertemente convexo en $M^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.*

Si $D \subset C$ es una cara entonces existe un funcional $\mathbf{z} \in M^* \cap \check{C}$ tal que $D = C \cap \mathbf{z}^\perp$ por lo cual D es también un cono poliédrico fuertemente convexo. Se tendrá $S_D = S_C + \langle -\mathbf{z} \rangle_{\mathbb{Z}^+}$, $U_D = \{\mathbf{u} \in U_C |\ \langle \mathbf{z} | \mathbf{u} \rangle \neq 0\}$ y éste es un conjunto abierto en U_C.

Teorema 3.1 *Sea $\mathcal{F}$ un abanico en M. Entonces se puede pegar de manera natural a los conjuntos en $(U_C)_{C\in\mathcal{F}}$ para obtener un espacio de Haussdorff*

$$\mathrm{Emb}(\mathcal{F}) = \bigcup_{C\in\mathcal{F}} U_C,$$

el cual es una variedad tórica de dimensión m, llamada inmersión toral *asociada al abanico $(M, \mathcal{F})$.*

3.4 Polinomios de Laurent

Sea $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_{n-1})$ una colección de n variables formales. El *anillo de polinomios de Laurent* es $\mathbb{C}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}]$. Sea $\theta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}]$ el homomorfismo $i = (i_0, \ldots, i_{n-1}) \mapsto \mathbf{X}^i = \prod_{j=0}^{n-1} X_j^{i_j}$ que identifica al retículo $\mathbb{Z}^n$, y su estructura aditiva, con los *monomios de Laurent*, y su estructura multiplicativa.

Para un polinomio de Laurent $P(\mathbf{X}) = \sum_{j\in J} a_j\, \mathbf{X}^i$, donde $J \subset \mathbb{Z}^n$ es un conjunto finito, se define el *soporte* de $P(\mathbf{X})$ como $\mathrm{Spt}(P(\mathbf{X})) = \{j \in \mathbb{Z}^n |\ a_j \neq 0\}$.

Proposición 3.7 *Sea C un cono reticular y sea $R_C = \{P(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}] |\ \mathrm{Spt}(P(\mathbf{X})) \subset \check{C} \cap R_n^\star\}$. Entonces R_C tiene una estructura de anillo y es de hecho un álgebra monomial finitamente generada, es pues la $\mathbb{C}$-álgebra generada por los monomios de Laurent.*

En lo que sigue, utiizaremos la notación y los conceptos introducidos en la sección 3.1.

La *variedad afín tórica* de un cono poliédrico C se define como $\mathrm{Spec}(R_C)$. Mediante la elección adecuada de generadores en $\check{C} \cap R_n^\star$, la $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada R_C puede ser representada como un anillo de coordenadas. Tal representación determina, a su vez, una representación de la variedad afín tórica $X_C = \mathrm{Spec}(R_C)$. Cualesquiera dos tales representaciones son homeomorfas.

Sea $\{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ un sistema de generadores de $\check{C} \cap R_n^\star$. Para cada $i < n$ escribamos $\mathbf{a}_i = (\alpha_{i0}, \ldots, \alpha_{i,n-1})$. Mediante el isomorfismo θ se obtiene el monomio de Laurent $\mu_i = \theta(\mathbf{a}_i) = \prod_{j=0}^{n-1} X_j^{\alpha_{ij}}$. La $\mathbb{C}$-álgebra $R_C = \mathbb{C}[\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}]$ puede entonces escribirse como $R_C = \mathbb{C}[\mathbf{X}]/\mathcal{I}_C$ para algún ideal $\mathcal{I}_C$ construido como sigue:

Se ve que para cualesquiera $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}), (\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$, vale $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, \mathbf{a}_i = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\, \mathbf{a}_i$ en $\check{C} \cap R_n^\star$ cuando y sólo cuando $\prod_{i=0}^{n-1} X_i^{\alpha_i} = \prod_{i=0}^{n-1} X_i^{\beta_i}$. Así pues sea

$$\mathcal{P}_C = \{\prod_{i=0}^{n-1} X_i^{\alpha_i} - \prod_{i=0}^{n-1} X_i^{\beta_i} |\ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\, a_i = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\, a_i\},$$

y sea $\mathcal{I}_C = (\mathcal{P}_C)$ el ideal generado por esos polinomios.

El toro complejo. Sea $C = \{0\}$ el cono trivial en $\mathbb{R}^n$. Entonces el cono dual es $\check{C} = \mathbb{R}^{n\star}$. Para $\check{C} \cap R_n^\star$ consideremos el conjunto de generadores $A_0 = \{\mathbf{e}_0^\star, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}^\star, -\mathbf{e}_0^\star, \ldots, -\mathbf{e}_{n-1}^\star\}$, donde $\mathbf{e}_j^\star$ es el j-ésimo vector de la base dual de la canónica en $\mathbb{R}^n$. La correspondiente $\mathbb{C}$-álgebra monomial es

$$\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n-1}; X_0^{-1}, \ldots, X_{n-1}^{-1}] = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n-1}; X_n, \ldots, X_{2n-1}]/\mathcal{I}_C$$

donde $\mathcal{I}_C$ está generado por la familia de polinomios $\mathcal{P}_C = (X_i X_{n+i} - 1)_{i=0}^{n-1}$. En consecuencia, la variedad tórica es $\mathrm{Spec}(R_C) = V(\mathcal{P}_C)$. De hecho la transformación $(\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}; \mathbf{x}_0^{-1}, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^{-1}) \mapsto (\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ determina un homeomorfismo $\mathrm{Spec}(R_C) \to (\mathbb{C} - \{0\})^n$. Como $\mathbb{C}$ es un campo, se denota $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ a su grupo multiplicativo. El espacio $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ se llama *n-toro complejo algebraico* y es homeomorfo a $(S_1)^n \times (\mathbb{R}^+)^n$. Por tanto, el n-toro complejo contiene al n-toro real.

Otra representación del toro complejo. Como antes, sea $C = \{0\}$ el cono trivial en $\mathbb{R}^n$. Para $\check{C} \cap R_n^\star$ consideremos el conjunto de generadores $A_1 = \{\mathbf{e}_0^\star, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}^\star, -(\mathbf{e}_0^\star + \cdots + \mathbf{e}_{n-1}^\star)\}$. La correspondiente $\mathbb{C}$-álgebra monomial es ahora

$$\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n-1}; (X_0 \cdots X_{n-1})^{-1}] = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{n-1}; X_n]/\mathcal{I}_C$$

donde $\mathcal{I}_C$ está generado por la mónada $\mathcal{P}_C = (X_0 \cdots X_{n-1} X_n - 1)$. La variedad tórica es pues $\mathrm{Spec}(R_C) = V(\mathcal{P}_C)$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ y es homeomorfa a $\mathbb{T}$.

4 Haces y gavillas

4.1 Haces fibrados (*fiber bundles*)

Sean F, E, B tres espacios topológicos, B conexo y $\pi : E \to B$ una función suprayectiva contínua tal que se cumple la

Condición local de trivialidad Para cada punto $e \in E$ existe una vecindad abierta $U_e \subset B$ de $\pi(e) \in B$ para la cual hay una inclusión homeomorfa $\phi_e : \pi^{-1}(U_e) \to U_e \times F$ que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_e) \subset E \arrow[r, "\phi_e"] \arrow[dr, "\pi"'] & U_e \times F \arrow[d, "\mathrm{pr}^1"] \\ & U_e \subset B \end{tikzcd} \tag{14}$$

En tal caso se escribe $F \to E \xrightarrow{\pi} B$ y se dice que (E, π, B, F) es un *haz fibrado* (*fiber bundle*). B es el *espacio base*, E es el *espacio total* y F es propiamente la *fibra*: para todo $b \in B$, su imagen inversa $\pi^{-1}(\{b\})$ es homeomorfa a F y es la *fibra* sobre b. La colección $((U_e, \phi_e))_{e\in E}$ se dice ser una *trivialización local* del haz, y cada (U_e, ϕ_e) un *mapa en* $e \in E$. Se tiene también que se puede inducir la topología cociente determinada por π sobre el espacio B. Un *haz fibrado suave* (*smooth fiber bundle*) es un haz fibrado (E, π, B, F) donde el espacio total E está incluido en la categoría de variedades suaves.

La *cinta de Möbius* es el haz fibrado que tiene un segmento de recta como fibra, que hace un giro, y a un círculo como espacio base. Si el segmento no gira, el haz fibrado es un *cilindro*. Localmente, la cinta de Möbius y el cilindro son indistinguibles.

Un círculo de fibra sobre otro círculo como espacio base produce el *toro*, $S^2 = S^1 \times S^1$. Cuando el círculo de fibra hace un giro, se obtiene la *botella de Klein*.

De manera general, si X es un espacio topológico, $f : X \to X$ es un homeomorfismo de X en sí mismo e $I = [0, 1]$ es el intervalo real unitario entonces en el producto cartesiano $I \times X$ se considera la relación de equivalencia $R_{X,f}$ tal que $(0, f(x))R_{X,f}(1, x)$, $\forall x \in X$. El cociente $M_{X,f} = X/R_{X,f}$ es el *toro mediante el homeomorfismo* f (*mapping torus*), y es un haz fibrado con X como fibra e I como espacio base.

Un *haz vectorial* (*vector bundle*) es un haz fibrado cuya fibra es un espacio vectorial. Por ejemplo, el espacio vectorial tangente a una variedad en cada punto produce un haz vectorial. Al seleccionar una base en la fibra, se obtiene un *haz de referenciales* (*frame bundle*)

Una *sección* de un haz fibrado $F \to E \xrightarrow{\pi} B$ es una función $f : B \to E$ tal que $\forall b \in B$: $\pi(f(b)) = b$. Puede no haber secciones globales, por lo que se puede considerar *secciones locales*: $f : U \to E$ tales que $\forall b \in U$ $\pi(f(b)) = b$, donde U es un abierto de B. Las secciones forman *haces* (*sheaves*), a secas. Esto lo veremos con más detalle un poco más adelante.

Sea G un grupo topológico que actúa en el espacio de fibra F, G puede ser, por ejemplo, un grupo de homeomorfismos de F en sí mismo. Sea $((U_e, \phi_e))_{e\in E}$ una trivialización local del haz fibrado $F \to E \xrightarrow{\pi} B$. Sean $e_0, e_1 \in E$ dos puntos tales que $U_{e_0} \cap U_{e_1} \neq \emptyset$. Una función $t_{e_0e_1} : U_{e_0} \cap U_{e_1} \to G$ tal que

$$\forall (b, f) \in (U_{e_0} \cap U_{e_1}) \times F : \ \phi_{e_1} \circ \phi_{e_0}^{-1}(b, f) = (b, t_{e_0e_1}(f))$$

se dice ser una *función de transición*. Un *G-atlas* es una trivialización local $((U_e, \phi_e))_{e\in E}$ tal que siempre que $U_{e_0} \cap U_{e_1} \neq \emptyset$ hay una función de transición $t_{e_0e_1} : U_{e_0} \cap U_{e_1} \to G$. Dos G-atlas son *equivalentes* si su unión es un G-atlas. Un *G-haz* es un haz fibrado junto con la clase de equivalencia de un G-atlas. En tal caso, G se dice ser el *grupo de calibración* (*gauge group*). Las funciones de transición satisfacen las condiciones siguientes:

- $t_{ee} = 1$
- $t_{e_0e_1} = t_{e_1e_0}^{-1}$
- $t_{e_0e_2} = t_{e_0e_1} t_{e_1e_2}$

Sean $F_0 \to E_0 \xrightarrow{\pi_0} B_0$ y $F_1 \to E_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1$ dos haces fibrados. Un *morfismo de haces* es una pareja (ϕ, f) tal que $\phi : E_0 \to E_1$ y $f : B_0 \to B_1$ cumplen $\pi_1 \circ \phi = f \circ \pi_0$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_0"'] & E_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ B_0 \arrow[r, "f"] & B_1 \end{tikzcd} \tag{15}$$

Si $B_0 = B_1$ entonces se exige que $f = \mathrm{id}_{B_0}$ en todo morfismo de haces.

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, y sea $V \to E \xrightarrow{\pi} B$ un haz vectorial. Para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(\{b\}) \approx \{b\} \times V = V_b \subset E$ es una copia de V y tiene una estructura natural de espacio vectorial. Sea $U \subset B$ un abierto. Una sección $s : U \to E$ ha de satisfacer $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Sea $\mathcal{F}(U)$ la colección de secciones definidas sobre U. La transformación "*cero*", $b \mapsto$(vector cero de $\pi^{-1}(\{b\})$) es una sección, y, de hecho, $\mathcal{F}(U)$ adopta una estructura de espacio vectorial con las operaciones definidas por componentes.

Supongamos que $V \to E \xrightarrow{\pi} B$ y $U \to F \xrightarrow{\rho} B$ son dos haces vectoriales. Se define las operaciones siguientes:

Suma directa $E \oplus F$ es el haz cuya fibra sobre cada $b \in B$ es $E_b \oplus F_b$.

Producto tensorial $E \otimes F$ es el haz cuya fibra sobre cada $b \in B$ es $E_b \otimes F_b$.

Haz "Hom" $\mathrm{Hom}(E, F)$ es el haz cuya fibra sobre cada $b \in B$ es $\mathrm{Hom}(E_b, F_b)$, el espacio de transformaciones lineales $E_b \to F_b$.

Haz vectorial dual $E^\star = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{R} \times B)$. Se tiene que hay un isomorfismo natural:

$$\mathrm{Hom}(E, F) = E^\star \otimes F.$$

4.2 Gavillas (*sheaves*)

Sea B un espacio topológico y sea $\mathcal{C}$ una categoría (con sus propios objetos y clases de morfismos entre ellos).

Una *pregavilla* (*presheaf*) *evaluada en* $\mathcal{C}$, es una correspondencia $\mathcal{F}$ que a cada abierto $U \subset B$ le asocia un objeto $\mathcal{F}(U)$ en la categoría $\mathcal{C}$ de manera que para cualesquiera dos abiertos U, V, si $U \subset V$ entonces existe un morfismo $\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ en la categoría $\mathcal{C}$, por lo que se dice ser un *morfismo de restricción*. Se deben cumplir también las siguientes dos condiciones:

- U abierto en $B \implies \mathrm{res}_{UU} = \mathrm{id}_U$.
- U, V, W abiertos en B, $U \subset V \subset W \implies \mathrm{res}_{UW} = \mathrm{res}_{UV} \circ \mathrm{res}_{VW}$.

Sea $\mathcal{O}(B)$ la categoría de conjuntos abiertos en B con los morfismos dados por las inclusiones. Entonces una pregavilla evaluada en $\mathcal{C}$ es exactamente un funtor contravariante $\mathcal{O}(B) \to \mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría concreta y $\mathcal{F}$ es una pregavilla evaluada en $\mathcal{C}$ entonces para cada abierto $U \subset B$, a los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se les llama *secciones de* $\mathcal{F}$ *sobre* U. Una sección correspondiente a todo el espacio B se dice ser *global*.

Supongamos por un momento que $\mathcal{C}$ es la categoría de conjuntos con los morfismos de inclusiones. Una *gavilla* (*sheaf*) es una pregavilla $\mathcal{F}$ evaluada en $\mathcal{C}$ tal que se cumplen las condiciones siguientes:

Identidad local Si $(U_i)_i$ es un recubrimiento abierto de un abierto U en B entonces:

$$\forall s, t \in \mathcal{F}(U) : \ [\forall i \ [\mathrm{res}_{U_iU}(s) = \mathrm{res}_{U_iU}(t)] \implies s = t] \, .$$

Pegado Sea $(U_i)_i$ un recubrimiento abierto de un abierto U en B y sea $(s_i)_i$ una sucesión de secciones tal que $\forall i$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

1. $\forall i, j : \ \mathrm{res}_{(U_i \cap U_j);U}(s_i) = \mathrm{res}_{(U_i \cap U_j);U}(s_j)$.
2. $\exists s \in \mathcal{F}(U) : \ s_i = \mathrm{res}_{U_iU}(s)$.

Las sucesiones $(s_i)_i$ que cumplen la condición 1. se dicen ser *compatibles a pares*. La sección s que cumple la condición 2. se dice ser el *pegado* o la *concatenación* de las secciones $(s_i)_i$.

Así, en una gavilla toda sucesión de secciones compatibles a pares posee un único pegado.

Para un punto $b \in B$ el *tallo* (*stalk*) $\mathcal{F}_b$ de la gavilla $\mathcal{F}$ es $\mathcal{F}_b = \varinjlim_{b\in U} \mathcal{F}(U)$.

Sea B un espacio topológico y sea $\mathcal{O}_B$ una gavilla de anillos. La pareja $(B, \mathcal{O}_B)$ se dice ser un *espacio anillado*. Una *gavilla de módulos* es una gavilla $\mathcal{M}$ tal que para cada abierto $U \subset B$, $\mathcal{M}(U)$ es un $\mathcal{O}_B(U)$-módulo. Una *gavilla localmente libre* es una gavilla $\mathcal{F}$ de módulos sobre un espacio anillado B si para cada punto $b \in B$ existe un abierto $U_b \subset B$ tal que $\mathcal{F}(U_b)$ es un $\mathcal{O}_B(U_b)$-módulo libre, cuya dimensión es el *rango* de $\mathcal{F}(U_b)$. En tal caso, el tallo $\mathcal{F}_b$ es también un $\mathcal{O}_B$-módulo libre.

Un *haz de líneas* (*line bundle*) es una gavilla $\mathcal{L}$ localmente libre de rango 1. La colección de secciones globales se denota $\Gamma(B, \mathcal{L})$.

Si $\mathcal{O}_B$ es una gavilla de anillos y $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de módulos tales que para todo abierto $U \subset B$, $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{G}(U)$ son $\mathcal{O}_B(U)$-módulos, el producto $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{G}$ es la gavilla $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_B(U)} \mathcal{G}(U)$, con este último definido como en la sección 1.2.2 y caracterizado también en la 2.1.3.

5 Divisores

5.1 Divisores sobre curvas

5.1.1 Teorema de Riemann-Roch

Sean $\mathbb{K}$ un campo y Q una curva. Sea $\mathbf{D} = \mathbb{Z}^{\mathrm{Q}}$ dotado de su estructura de grupo libre abeliano sobre Q, con la suma aplicada componente-a-componente. A los elementos de $\mathbf{D}$ se les llama *divisores*, y si $\mathbf{d} = (d_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a}\in\mathrm{Q}}$ es un divisor, se le escribe también como $\mathbf{d} = \sum_{\mathbf{a}\in\mathrm{Q}} d_{\mathbf{a}}\, \mathbf{e}_{\mathbf{a}}$, donde $\mathbf{e}_{\mathbf{a}} = (\delta_{\mathbf{ab}})_{\mathbf{b}\in\mathrm{Q}}$ y $\delta_{\mathbf{ab}}$ es la *delta de Kroenecker*. El *soporte* de un divisor $\mathbf{d}$ es $\mathrm{Spt}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{Q}|\ d_{\mathbf{a}} \neq 0\}$, y su *grado* es $\mathrm{gr}(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathrm{Q}} d_{\mathbf{a}}$. El grupo de divisores $\mathbf{D}$ queda ordenado con el orden producto de $\mathbb{Z}$.

Un $\mathbb{K}$-*divisor* es un divisor $\mathbf{d} = \sum_{\mathbf{a}\in\mathrm{Q}} d_{\mathbf{a}}\, \mathbf{e}_{\mathbf{a}}$ tal que $\forall \mathbf{a} \in \mathrm{Q}$, $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{K}}|\mathbb{K})$: $d_{\phi(\mathbf{a})} = d_{\mathbf{a}}$. Así si $\mathrm{Spt}(\mathbf{d}) \subset \mathbb{K}$, entonces $\mathbf{d}$ es un $\mathbb{K}$-divisor. Sea $\mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ la colección de todos los $\mathbb{K}$-divisores. Se tiene, naturalmente, que $\mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ es un subgrupo de $\mathbf{D}$. En lo que sigue, nos circunscribiremos sólo a $\mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$.

Para una función racional $f \in \mathbb{K}(\mathrm{Q})$ se define su divisor como $\mathbf{d}_f = \sum_{\mathbf{a}\in\mathrm{Q}} v_{\mathbf{a}}(f)\, \mathbf{e}_{\mathbf{a}}$. Naturalmente, $\mathbf{d}_f = \mathbf{d}_f^+ - \mathbf{d}_f^-$, donde

$$\mathbf{d}_f^+ = \sum_{v_{\mathbf{a}}(f)>0} v_{\mathbf{a}}(f)\, \mathbf{e}_{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_f^- = \sum_{v_{\mathbf{a}}(f)<0} (-v_{\mathbf{a}}(f))\, \mathbf{e}_{\mathbf{a}} \tag{16}$$

y son llamados, respectivamente, *divisores de ceros* y *de polos* de f.

Un divisor $\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ se dice ser *principal* si existe $f \in \mathbb{K}(\mathrm{Q})$ tal que $\mathbf{d} = \mathbf{d}_f$. Dos divisores $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1 \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ son *linealmente equivalentes* si su diferencia $\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}_1$ es un divisor principal.

Para un divisor $\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ sea

$$L(\mathbf{d}) = \{f \in \mathbb{K}(\mathrm{Q})|\ \forall \mathbf{a} \in \mathrm{Q}:\ v_{\mathbf{a}}(f) + d_{\mathbf{a}} \geq 0\} \cup \{0\}. \tag{17}$$

Entonces $L(\mathbf{d})$ es un espacio vectorial, llamado *asociado* al divisor $\mathbf{d}$. Sea $\ell(\mathbf{d}) = \dim L(\mathbf{d})$.

Lema 5.1 *Sea $\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ un divisor. Se cumplen las condiciones siguientes:*

1. *Si $\mathbf{d}' \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ es linealmente equivalente a $\mathbf{d}$, entonces $L(\mathbf{d}')$ es isomorfo a $L(\mathbf{d})$.*
2. *Si $\mathrm{gr}(\mathbf{d}) < 0$ entonces $L(\mathbf{d}) = \{0\}$.*
3. *$L(\mathbf{0}) = \mathbb{K}$.*

Para la curva $\mathrm{Q} = Z(Q(X_0, X_1, X_2))$, su *género* se define como $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ donde d es el grado del polinomio $Q(X_0, X_1, X_2)$. Un divisor $\mathbf{w} \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ se dice ser *canónico* si $\mathrm{gr}(\mathbf{w}) = 2(g-1)$ y $\ell(\mathbf{w}) = g$.

Teorema 5.1 (Riemann-Roch) *Para cualquier divisor* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$*:*

$$\ell(\mathbf{d}) = \mathrm{gr}(\mathbf{d}) + 1 - g + \ell(\mathbf{w} - \mathbf{d}),$$

donde $\mathbf{w}$ *es un divisor canónico.*

Corolario 5.1 $\forall \mathbf{d} \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}: \ [\mathrm{gr}(\mathbf{d}) \geq 2g - 1 \implies \ell(\mathbf{d}) = \mathrm{gr}(\mathbf{d}) + 1 - g]$.

5.1.2 Divisores monopuntuales

Sean $\mathbb{K}$ un campo y Q una curva. Un *divisor monopuntual* es uno donde su soporte es una mónada, es decir es de la forma $\mathbf{d} = m\,\mathbf{e}_{\mathbf{a}}$ para algún punto $\mathbb{K}$-racional $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$. En tal caso $L(\mathbf{d})$ consta de las funciones $f \in \mathbb{K}(\mathrm{Q})$ tales que $\mathbf{d}_f^- = \ell\,\mathbf{e}_{\mathbf{a}}$, con $\ell \leq m$. Sea

$$H(\mathbf{a}) = \{\ell \in \mathbb{N} |\ \exists f \in \mathbb{K}(\mathrm{Q}) :\ \mathbf{d}_f^- = \ell\,\mathbf{e}_{\mathbf{a}}\},$$

llamado el *semigrupo de Weierstrass* en $\mathbf{a}$. Los enteros en $\mathbb{N} - H(\mathbf{a})$ se dicen ser *huecos* para $\mathbf{a}$, y por mera contraposición, los de $H(\mathbf{a})$ *llenos* para $\mathbf{a}$.

Proposición 5.1 *Las siguientes aseveraciones son verdaderas:*

- *La dimensión del espacio* $L(m\,\mathbf{e}_{\mathbf{a}})$ *es el número de enteros llenos para* $\mathbf{a}$ *que no exceden* m*.*
- *Cualquier entero* $\ell \geq 2g$ *es lleno para todo* $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$*.*
- *En cada* $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$ *hay exactamente* g *huecos para* $\mathbf{a}$*.*

Corolario 5.2 *Si* $g \geq 1$ *existe al menos un hueco en cada punto* $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$*. Ya que* $H(\mathbf{a})$ *es un semigrupo,* 1 *siempre es lleno para cada* $\mathbf{a} \in \mathrm{Q}$*.*

Lema 5.2 *Sea* $(f_j)_{j=0}^{r-1} \subset L(m\,\mathbf{e}_{\mathbf{a}})$ *una sucesión de funciones racionales tales que las valuaciones* $(v_{\mathbf{a}}(f_j))_{j=0}^{r-1}$ *sean distintas a pares. Entonces las funciones* $(f_j)_{j=0}^{r-1}$ *son linealmente independientes.*

5.1.3 Códigos de Goppa

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, donde $q = p^m$ es una potencia de un primo. Utilizaremos la notación introducida en las secciones previas. Sea Q una curva y sea $A_n = \{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}\} \subset \mathrm{Q}$ un conjunto de n puntos $\mathbb{F}_q$-racionales. Sea $\mathbf{d}_{A_n} = (d_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in \mathrm{Q}} \in \mathbf{D}_{\mathrm{Q}}$ un divisor tal que $\forall j \leq n-1$, $d_{\mathbf{a}_j} = 0$, es decir $A_n \cap \mathrm{Spt}(\mathbf{d}_{A_n}) = \emptyset$. Sea $e_{A_n} : L(\mathbf{d}_{A_n}) \to \mathbb{F}_q^n$, $f \mapsto e_{A_n}(f) = (f(\mathbf{a}_j))_{j=0}^{n-1}$, la cual es, evidentemente, una transformación lineal. Sea $\mathbf{e}_{A_n}$ el divisor definido como $\mathbf{e}_{A_n} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{e}_{\mathbf{a}_j}$. Se define el *código de Goppa* asociado a los divisores $\mathbf{e}_{A_n}, \mathbf{d}_{A_n}$ como $C_{\mathbf{e}_{A_n}\mathbf{d}_{A_n}} = e_{A_n}(L(\mathbf{d}_{A_n})) < \mathbb{F}_q^n$.

Lema 5.3 *Sea* $k = \dim C_{\mathbf{e}_{A_n}\mathbf{d}_{A_n}}$ *y* d *la distancia mínima de* $C_{\mathbf{e}_{A_n}\mathbf{d}_{A_n}}$*. Entonces:*

- $k = \ell(\mathbf{d}_{A_n}) - \ell(\mathbf{d}_{A_n} - \mathbf{e}_{A_n})$, *y*
- $d \geq n - \mathrm{gr}(\mathbf{d}_{A_n})$.

Proposición 5.2 *Sea* g *el género de la curva* $\mathrm{Q} = Z(Q(X_0, X_1, X_2))$*.*

1. *Si* $\mathrm{gr}(\mathbf{d}_{A_n}) < n$ *entonces* $k = \ell(\mathbf{d}_{A_n})$*. Por tanto,* $k \geq \mathrm{gr}(\mathbf{d}_{A_n}) + 1 - g$ *y en consecuencia* $d + k \geq n + 1 - g$*. Se tendrá que una matriz generatriz del código* $C_{\mathbf{e}_{A_n}\mathbf{d}_{A_n}}$ *es de la forma* $M = (f_i(\mathbf{a}_\mathbf{j}))_{0 \leq i \leq k}^{0 \leq j \leq n-1}$ *donde* $\{f_0, \ldots, f_{k-1}\}$ *es una* $\mathbb{F}_q$*-base del espacio* $L(\mathbf{d}_{A_n})$*.*
2. *Si* $2g - 2 < \mathrm{gr}(\mathbf{d}_{A_n}) < n$ *entonces* $k = \mathrm{gr}(\mathbf{d}_{A_n}) + 1 - g$*.*

Por la cota de Singleton, se tendrá que si $\mathrm{gr}(\mathbf{d}_{A_n}) < n$, entonces $n + 1 - g \leq d + k \leq n + 1$.

Proposición 5.3 *Existe un divisor canónico* $\mathbf{w}$ *tal que* $C_{\mathbf{e}_{A_n}\mathbf{d}_{A_n}}^{\perp} = C_{\mathbf{e}_{A_n}, \mathbf{e}_{A_n} - \mathbf{d}_{A_n} + \mathbf{w}}$*.*

5.2 Divisores de Weil

5.2.1 Divisores en espacios topológicos

Sea X un espacio topológico y sea $Y \subset X$ un subespacio cerrado e irreducible. La *codimensión* de Y en X es el supremo, menos 1, de las cardinalidades de cadenas crecientes de subespacios cerrados e irreducibles en X que se inician con Y.

Sea R un anillo y sea $I < R$ un ideal primo. La *codimensión* de I en R es el supremo, menos 1, de las cardinalidades de cadenas decrecientes de ideales primos en R que se inician con I, es pues su *altura* como se definió en la sección 2.1.1.

Sea $\mathrm{CD}_X(1)$ la colección de subespacios de codimensión 1 en X. Un *divisor de Weil* en X es un elemento del grupo libre $\mathbb{Z}^{\mathrm{CD}_X(1)}$: $\mathbf{d} = \sum\{d_Y\,\mathbf{e}_Y|\ Y \in \mathrm{CD}_X(1)\} = \sum_{Y\in\mathrm{CD}_X(1)} d_Y\,\mathbf{e}_Y$; y $\mathrm{Weil}(X) = \mathbb{Z}^{\mathrm{CD}_X(1)}$ es un grupo abeliano.

Así, si X es una curva entonces todo divisor de Weil es un divisor en el sentido de la sección anterior (cada mónada es de codimensión 1 en la curva).

Un divisor monopuntual también se dice ser un *divisor irreducible*. Un *divisor efectivo* es uno donde todos los valores d_Y son no-negativos. $\forall Y \in \mathrm{CD}_X(1)$, $d_Y \geq 0$. El *soporte del divisor* $\mathbf{d} = \sum_{Y\in\mathrm{CD}_X(1)} d_Y\,\mathbf{e}_Y$ es $\mathrm{Spt}(\mathbf{d}) = \bigcup_{d_Y\neq 0} Y$. Si $X_0 \subset X$ es un subespacio abierto de X entonces hay una *inclusión natural*

$$\mathrm{Weil}(X) \to \mathrm{Weil}(X_0)\quad,\quad \sum_{Y\in\mathrm{CD}_X(1)} d_Y\,\mathbf{e}_Y \mapsto \sum_{Y\in\mathrm{CD}_X(1)\,\&\,Y\cap X_0\neq\emptyset} d_Y\,\mathbf{e}_{Y\cap X_0}.$$

5.2.2 Divisores y gavillas

Sea X regular. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una gavilla evaluada en la categoría de funciones racionales sobre X. Sea s una sección de $\mathcal{F}$ que no se anula en una componente ireducible de X. Entonces se define

$$\mathrm{div}(s) = \sum_{Y\in\mathrm{CD}_X(1)} \mathrm{val}_Y(s)\,\mathbf{e}_Y,$$

donde $\mathrm{val}_Y(s)$ se determina tomando un abierto $U \subset Y$ del punto *genérico* de Y donde exista una trivialización.

6 Formas diferenciales y residuos

En esta sección seguiremos las presentaciones en [5] y en [6].

6.1 Diferenciales de Kähler

Sea R un anillo.

Observación 6.1 *Sean A, B dos R-álgebras tales que existe un homomorfismo $\rho : A \to B$. Sean $\alpha : R \to A$ y $\beta : R \to B$ los correspondientes homomorfismos de anillos. Entonces $\beta = \rho \circ \alpha$:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[d, "\rho"] \\ & B \end{tikzcd} \tag{18}$$

Sea A una R-álgebra y M un A-módulo. Si α es el homomorfismo de anillos $R \to A$, se puede suponer a A con un elemento unidad 1 e identificar a R con el conjunto $R1 = \alpha(R) \subset A$. Una *R-derivación* del álgebra A en el módulo M es una función $d : A \to M$ con las propiedades siguientes:

1. *Aditividad*: $\forall a_0, a_1 \in A :\ d(a_0 + a_1) = d(a_0) + d(a_1)$.
2. *Regla de Leibnitz*: $\forall a_0, a_1 \in A :\ d(a_0 a_1) = a_0\, d(a_1) + a_1\, d(a_0)$.

3. *Nulidad "en constantes"*: $\forall r \in R: \ d(r) = 0$.

Sea $\mathrm{Der}_R(A, M)$ la colección de R-derivaciones del R-álgebra A en el A-módulo M.

Un A-módulo $\Omega^1_{A|R}$, junto con una derivación $d : A \to \Omega^1_{A|R}$, es de *formas diferenciales relativas* de A sobre R si satisface la siguiente *Propiedad Universal del Módulo de Formas Diferenciales Relativas*:

> Para cualquier A-módulo M, si $d' : A \to M$ es una derivación entonces existe un único homomorfismo de A-módulos $\phi : \Omega^1_{A|R} \to M$ tal que $d' = \phi \circ d$, es decir, que hace conmutativo el diagrama
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d'"'] & \Omega^1_{A|R} \arrow[d, dotted, "\phi"] \\ & M \end{tikzcd} \tag{19}$$

Un tal módulo $\Omega^1_{A|R}$ se obtiene al reducir el A-módulo libre generado por el conjunto de símbolos $\{da|\ a \in A\}$ mediante las relaciones 1., 2. y 3. arriba, junto con la derivación $d : a \mapsto da$. Otra manera de realizar $\Omega^1_{A|R}$ es la siguiente: sea $f : A \otimes_R A \to A$, $a_0 \otimes a_1 \mapsto a_0 a_1$, y sea $I = \ker(f)$. Entonces (I/I^2) con la derivación $d : a \mapsto 1 \otimes a + a \otimes 1$ es $\Omega^1_{A|R}$.

Para cada $a \in A$ sea $da \in \Omega^1_{A|R}$ su imagen bajo la derivación d. Entonces, como un A-módulo, $\Omega^1_{A|R}$ está generado por la imagen dA de A bajo d.

Se tiene, por ejemplo, que $\Omega^1_{R[X_0,\ldots,X_{m-1}]|R}$ es el R-módulo de rango m generado por $dX_0, \ldots, dX_{m-1}$.

Como un replanteamiento de la Propiedad Universal (19) se tiene:

Proposición 6.1 *Para cada A-módulo M, $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A|R}, M)$ es isomorfo a $\mathrm{Der}_R(A, M)$, mediante el isomorfismo $\phi \mapsto \phi \circ d$.*

También se tiene:

Proposición 6.2 *Sean A, B dos R-álgebras tales que existe un homomorfismo $\rho : A \to B$. Entonces:*

- *La transformación $\beta_\rho : \Omega^1_{B|R} \to \Omega^1_{B|A}$ que hace conmutativo el diagrama*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "d_A"'] & B \arrow[d, "d_B"] \\ \Omega^1_{A|R} \arrow[r, "\beta_\rho"'] & \Omega^1_{B|A} \end{tikzcd}$$
es un isomorfismo.
- *La transformación $\alpha_\rho : \Omega^1_{A|R} \otimes_A B \to \Omega^1_{B|R}$, $(da \otimes b) \mapsto b\, d\rho(a)$, es un isomorfismo.*
- *Sea $f : A \otimes_R A \to A$, $a_0 \otimes a_1 \mapsto a_0 a_1$ e $I = \ker(f)$. Sea $B = A/I$ y ρ la proyección canónica. Resulta la sucesión exacta:*
$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{A|R} \otimes_A B \xrightarrow{\alpha_\rho} \Omega^1_{B|R} \longrightarrow 0,$$
donde $\delta : [b] \mapsto db \otimes 1_B$.

Se sigue, por ejemplo:

Proposición 6.3 *Sean A_0, A_1 dos R-álgebras y sea $A_2 = A_0 \otimes_R A_1$. Entonces $\Omega_{A_2|A_0} \approx \Omega_{A_1|R} \otimes_{A_1} A_2$.*

Del tercer punto de la proposición 6.2 se sigue también:

Proposición 6.4 *Sea $\mathbb{K}$ un campo y A un álgebra finitamente generada sobre $\mathbb{K}$. Sea $x \in \mathrm{Spec}(A)$ un punto racional correspondiente a un ideal maximal I_x de A. Entonces el homomorfismo canónico*
$$I_x/I_x^2 \xrightarrow{\delta_x} \Omega^1_{A|\mathbb{K}} \otimes_A \mathbb{K}(x)$$
del tercer punto de la proposición 6.2 es un isomorfismo. Aquí, $\mathbb{K}(x) = \mathbb{K}/I_x$ es el campo de residuos *de $\mathbb{K}$ módulo I_x.*

6.2 Algebras tensorial y exterior

Sea R un anillo y sea M un R-módulo. Se define $M^{\otimes 0} = R$ y $M^{\otimes(n+1)} = M^{\otimes n} \otimes_R M$.

El *álgebra tensorial* del R-módulo M es $T(M) = \bigoplus_{n\geq 0} M^{\otimes n}$, la cual tiene una estructura natural de R-álgebra.

Sea $\wedge(M)$ el cociente de $T(M)$ entre el ideal (bilateral) generado por los elementos de la forma $x\otimes x$, con $x \in M$. Se tiene que $\wedge(M) = \bigoplus_{n\geq 0} \wedge^n M$ donde $\wedge^n M$ consta de las imágenes de elementos $x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}$ con $x_i \in M$. A una tal imagen se la escribe $x_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$. Necesariamente, $x_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = 0$ cuando y sólo cuando exista un par de índices distintos $i, j \in [\![0, n-1]\!]$ tal que $x_i = x_j$. Se sigue que para cualquier permutación $\sigma \in S_n$ en el grupo simétrico de n índices:

$$x_{\sigma(0)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(n-1)} = \mathrm{Sgn}(\sigma)\, x_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}.$$

$\wedge(M)$ tiene asímismo una estructura de R-álgebra y se llama *álgebra exterior* del R-módulo M.

6.3 Formas diferenciales

Sea R un anillo y A una R-álgebra. Sea $\Omega^1_{A|R}$ su módulo de formas diferenciales relativas. Para cada $n \geq 0$ se define $\Omega^n_{A|R} = \wedge^n \left(\Omega^1_{A|R}\right)$ y a sus elementos se les llama *n-formas diferenciales*.

Por ejemplo, si $A = R[X_0, \ldots, X_{m-1}]$, entonces $\Omega^n_{A|R}$ es el R-módulo generado por las n-formas diferenciales $\bigwedge_{i\in I} dX_i$, con $I \in [\![0, m-1]\!]^{(n)}$ siendo un conjunto de n índices. Se sigue entonces que el rango de $\Omega^n_{A|R}$ es $\binom{m}{n}$.

Referencias

[1] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Using Algebraic Geometry*. Springer, 2nd edition, 2005.

[2] D. Cox, J. Little, and H. Schenk. *Toric Varieties*. available on Cox's website, 2010.

[3] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, 1993.

[4] Massimo Giulietti. *Notes on Algebraic-Geometry*. available on Giulietti's website, 2003.

[5] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[6] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press, USA, August 2006.

[7] Tadao Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry: An Introduction to the Theory of Toric Varieties*. Springer-Verlag, 1988.

Índice