Los Teoremas de Incompletitud de Gödel: Parte II: Coherencia y completitud

Guillermo Morales Luna

Departmento de Computación
CINVESTAV-IPN

gmorales@cs.cinvestav.mx

2-o Encuentro Nacional de Epistemología y Matemáticas, Zacatecas

In Memoriam Guillermo Moreno

Contenido

Contenido

Coherencia

Sea L un alfabeto propio para una teoría de primer orden.
Si $\phi(\mathbf{x}) \in \mathrm{Fbf}(L)$ es una fórmula bien formada, en la que aparecen libres las variables $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, la cerradura de $\phi(\mathbf{x})$ es el enunciado cer-ϕ que se obtiene al cuantificar de manera universal a las variables libres.
De la regla de generalización y de los axiomas de tipo 4 se tiene

$$T \vdash \phi(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \text{cer-}\phi.$$

Hemos visto que

Una L-estructura $\mathfrak{M} = (M, \bar{\cdot})$ satisface un enunciado $\phi \in \mathrm{Fbf}(L)$ si es que, bajo la interpretación, lo aseverado por ϕ se cumple en $\mathfrak{M}$.

En este caso, escribimos $\mathfrak{M} \models \phi$.
Resulta claro de la definición de satisfactibilidad que
$\mathfrak{M} \models \phi$ si y sólo si $\mathfrak{M} \not\models \neg\phi$.
Así pues, si un enunciado se cumple en una L-estructura, la negación de ese enunciado no podrá satisfacerse en la misma L-estructura.

Si $T \subset \mathrm{Fbf}(L)$ es un conjunto de fórmulas, escribimos $\mathfrak{M} \models T$ cuando $\mathfrak{M} \models \phi$ para cada enunciado $\phi \in T$ que esté en T.
Si $\phi \in \mathrm{Fbf}(L)$ es otra fórmula, diremos que ϕ es una consecuencia lógica de T, y escribimos $T \models \phi$, si toda vez que se tenga un modelo de T ése ha de ser un modelo de ϕ, es decir, cualquiera que sea la L-estructura $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} \models T \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M} \models \phi.$$

Se dice que ϕ es universalmente válida, y escribimos $\models \phi$, si para cualquier L-estructura $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models \phi$.

Teorema (de coherencia)

Toda fórmula demostrable es universalmente válida, es decir:

$$\vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \models \phi.$$

En efecto, los axiomas son universalmente válidos y además esta noción "es invariante" bajo las reglas de inferencia, es decir, si en una L-estructura $\mathfrak{M}$ se tiene $\mathfrak{M} \models (\phi \to \psi)$ y $\mathfrak{M} \models \phi$ entonces $\mathfrak{M} \models \psi$ y, también, si $\mathfrak{M} \models \phi(\mathbf{x})$ entonces $\mathfrak{M} \models \forall \mathbf{x}\, \phi(\mathbf{x})$.

Definición

Un conjunto de fórmulas $T \subset Fbf(L)$ es consistente si no existe una fórmula $\phi \in Fbf(L)$ tal que, a la vez, $T \vdash \phi$ y $T \vdash \neg\phi$

Como una consecuencia del teorema de coherencia, una condición suficiente para tener consistencia está dada por la siguiente:

Proposición

Sea $T \subset Fbf(L)$. Si existe un modelo de T, es decir, para alguna L-estructura $\mathfrak{M}$ se tiene $\mathfrak{M} \models T$, entonces T es consistente.

En efecto, si $\mathfrak{M} \models T$ y $T \vdash \phi$ entonces, por coherencia, $\mathfrak{M} \models \phi$. Así pues, no puede suceder que haya una fórmula $\phi \in \text{Fbf}(L)$ tal que $T \vdash \phi$ y $T \vdash \neg\phi$. $\square$

Proposición (de finitud)

Sean $T \subset Fbf(L)$ y $\phi \in Fbf(L)$. Si $T \vdash \phi$ entonces existe un conjunto finito $T_0 \subset T$ tal que $T_0 \vdash \phi$.

En efecto, si $T \vdash \phi$ y D es una prueba de ϕ a partir de T, sea T_0 el conjunto de fórmulas en T que aparecen en D. Claramente D es también una prueba de ϕ a partir de T_0 y T_0 es finito pues D lo es. $\square$

Contenido

Algebra de Lindenbaum

En el conjunto de fórmulas bien formadas Fbf(L) definamos la relación:

$$\phi \equiv \psi \quad \Leftrightarrow \quad (\vdash \phi \rightarrow \psi)\ \&\ (\vdash \psi \rightarrow \phi) \tag{1}$$

Es claro que $\equiv$ es una relación de equivalencia. El cociente $\mathcal{L}(L) = \text{Fbf}(L)/\equiv$ se dice ser el álgebra de Lindenbaum del alfabeto L.

- $\mathcal{L}(L)$ es, en efecto, un álgebra booleana con las operaciones inducidas por los conectivos lógicos en Fbf(L).
- El elemento máximo es la clase de equivalencia de los teoremas y el elemento mínimo la de las contradicciones.
- Más aún, el orden del álgebra queda caracterizado por la relación:

$$[\phi] \leq [\psi] \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \phi \rightarrow \psi \tag{2}$$

Recordamos que si $\phi(x)$ es una fórmula donde x aparece libre (si apareciese también ligada entonces mediante un mero renombramiento de variables se deja en ϕ sólo las apariciones libres de la variable x), entonces $\phi(x \leftarrow y)$ denota a la fórmula obtenida de sustituir toda aparición de x por la variable y. Se tiene

$$[\forall x\, \phi(x)] = \bigwedge \{[\phi(x \leftarrow y)] | \, y \in \mathrm{Var}\} \tag{3}$$

En efecto, por el axioma Ax_4 se tiene

$$\vdash \forall x\, \phi(x) \rightarrow \phi(x \leftarrow y).$$

Por tanto $[\forall x\, \phi(x)] \leq \bigwedge \{[\phi(x \leftarrow y)] | \, y \in \mathrm{Var}\}$. Ahora, supongamos que la clase $[\psi]$ sea una cota inferior de $\{[\phi(x \leftarrow y)] | \, y \in \mathrm{Var}\}$. Sea y una variable que no aparezca en ψ. Entonces hemos de tener $\vdash \psi \rightarrow \phi(x \leftarrow y)$. Por Generalización se ha de tener también $\vdash \psi \rightarrow \forall y\, \phi(y)$. Así pues, $[\psi] \leq [\forall x\, \phi(x)]$.

Contenido

Completitud

Teorema (de completitud)

Toda fórmula que es universalmente válida es demostrable. Es decir, si $\phi \in Fbf(L)$ entonces

$$\models \phi \quad \Rightarrow \quad \vdash \phi.$$

Veremos que si ϕ no es demostrable entonces no es universalmente válida, es decir, existe un modelo de $\neg\phi$.

Ya que $\not\vdash \phi$ entonces $[\phi]$ no puede ser el elemento máximo $\mathbf{1}$ del álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}(L)$ ni $[\neg\phi]$ es el elemento mínimo $\mathbf{0}$.

Sea $(\phi_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de las fórmulas en $\mathrm{Fbf}(L)$ con una sola variable libre. Consideremos

$$\mathcal{B} = \{\,\{\phi_n(x_n \leftarrow y) |\, y \in \mathrm{Var}\} |\, n \in \mathbb{N}\}$$

Por el Lema de Tarski se tiene que existe un ultrafiltro F en el álgebra de Lindenbaum $\mathcal{L}(L)$ que contiene a $[\neg\phi]$ y preserva las intersecciones en $\mathcal{B}$. Por la relación (3) hemos de tener entonces

$$[\forall x_n\, \phi_n(x_n)] \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in \mathrm{Var}:\ [\phi_n(x_n \leftarrow y)] \in F \tag{4}$$

Con estos preliminares, pasemos ahora a construir el modelo de $\neg\phi$.

Introduzcamos la siguiente relación en el conjunto de términos:

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Term}(L): \ \xi_1 \sim_F \xi_2 \quad \Leftrightarrow \quad [\xi_1 = \xi_2] \in F \tag{5}$$

$\sim_F$ es una relación de equivalencia pues, por un lado, la igualdad de términos es demostrablemente reflexiva, simétrica y transitiva y, por otro lado, la clase de teoremas $\mathbf{1}$ es un elemento del ultrafiltro F.
Sea $M = \mathrm{Term}(L)/\sim_F$ el espacio cociente. M no es vacío y su cardinalidad es a lo sumo la de $\mathrm{Term}(L)$, es decir, es a lo sumo numerable.

Para cada símbolo de función f_i^n en la signatura de L, definamos

$$\overline{f_i^n}([\xi_1], \ldots, [\xi_n]) = [\xi] \quad \Leftrightarrow \quad [f_i^n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi] \in F.$$

Similarmente, para cada símbolo de relación R_i^n en la signatura de L, definamos

$$([\xi_1], \ldots, [\xi_n]) \in \overline{R_i^n} \quad \Leftrightarrow \quad [R_i^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)] \in F.$$

Tenemos pues que $\mathfrak{M} = (M, \bar{\cdot})$ es una L-estructura. En ella, se tiene para cualquier fórmula $\phi(\mathbf{x}) \in \mathrm{Fbf}(L)$:

$$\mathfrak{M} \models \phi(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad [\phi(\mathbf{x})] \in F. \tag{6}$$

lo cual puede verse por inducción en la complejidad de la fórmula $\phi(\mathbf{x})$. Ya que $[\neg\phi] \in F$, $\mathfrak{M}$ es un modelo de $\neg\phi$ y en consecuencia ϕ no podría ser universalmente válida.

Una fórmula $\phi \in \mathrm{Fbf}(T)$ es refutable si su negación es demostrable, es decir, $\vdash \neg\phi$.
Naturalmente ϕ es irrefutable si $\not\vdash \neg\phi$.
El Teorema de Completitud implica que si ϕ es irrefutable, entonces $\neg\phi$ no puede ser universalmente válida y, por el Teorema de Completitud, existe un modelo a lo sumo numerable de ϕ. Así pues,

Observación

Un conjunto finito de fórmulas bien formadas es consistente si y sólo si posee un modelo a lo sumo numerable.

En efecto, si $\Phi = (\phi_i)_{i=1}^n$ es consistente, entonces $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$ es irrefutable y por tanto posee un modelo a lo sumo numerable.
Recíprocamente, si Φ posee un modelo, entonces necesariamente Φ es consistente. $\square$

La hipótesis de finitud del conjunto de fórmulas consistente puede omitirse y esto dará una formulación alternativa del Teorema de Completitud. Para ver que en efecto puede omitirse presentaremos un resultado clásico de la llamada Teoría de Modelos.

Supongamos dada una colección $\left(\mathfrak{M}_i = (M_i, \cdot^{i})\right)_{i\in I}$ de L-estructuras. Sea F un ultrafiltro sobre I y sea $\mathfrak{M}_F$ el ultraproducto de la colección.

Teorema (de Łoś)

Para cualquier fórmula $\phi \in Fbf(L)$ se tiene

$$\mathfrak{M}_F \models \phi(\mathbf{x} \leftarrow \pi_F(\mathbf{a})) \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in I | \mathfrak{M}_i \models \phi(\mathbf{x} \leftarrow a_i)\} \in F \tag{7}$$

La demostración completa de este teorema excede los propósitos de este curso. Por tanto, sin entrar en detalles técnicos, nos restringiremos a bosquejar la demostración.

Se procede por inducción en la complejidad de la fórmula ϕ. El caso base corresponde a que ϕ sea un átomo.

El caso inductivo se divide en varios subcasos dependiendo de la forma de ϕ.

Si ϕ es una conjunción, (7) será válida porque la intersección de conjuntos en el ultrafiltro está en el ultrafiltro.

Si ϕ es una negación, (7) será válida porque al ser F un ultrafiltro, para cualquier conjunto de índices se tendrá que bien él, o su complemento, está en el ultrafiltro.

Si ϕ es la cuantificación existencial de alguna fórmula, (7) será válida porque dado un "vector" que realice la veracidad de ϕ en el ultraproducto, las entradas en el vector la realizarán en cada L-estructura componente, y, viceversa, si se tiene entradas que la realicen en cada componente, al conjuntarlas (acaso apelando al axioma de selección) se forma con ellas un "vector" que realice la veracidad de ϕ en el ultraproducto.

Los subcasos aquí delineados agotan el caso inductivo.

Teorema (de compacidad)

Un conjunto de fórmulas $T \subset Fbf(L)$ es consistente si y sólo si todo conjunto finito $T_0 \subset T$ es consistente.

Parte "si". Si T fuese inconsistente, entonces habría una fórmula $\phi \in \mathrm{Fbf}(L)$ tal que $T \vdash \phi$ y $T \vdash \neg\phi$. Sea T_0 el conjunto de fórmulas en T que aparecen en una demostración de ϕ o en una demostración de $\neg\phi$ a partir de T. Entonces $T_0 \subset T$ es finito y es inconsistente.

Parte "sólo si". Esto es una consecuencia directa de que el operador *Ded* es de "cerradura". $\square$

Ahora sí, estamos en posibilidad de suprimir la hipótesis de finitud en la observación 1.

Teorema (presentación alternativa de completitud)

Todo conjunto de fórmulas $T \subset Fbf(L)$ que sea consistente posee un modelo.

Sea T un conjunto de fórmulas que es consistente. Por el Teorema de Compacidad, toda parte finita de T es consistente y posee un modelo. Sea I la colección de partes finitas de T: para cada $i \in I$, i es un conjunto de fórmulas, finito y consistente. Sea $\mathfrak{M}_i$ un modelo de i. Sea $C^+(i) = \{j \in I | i \subseteq j\}$ el cono superior de i en I. Claramente $C^+(i) \neq \emptyset$ y:

$$i_1, \ldots, i_n \in I \quad \Rightarrow \quad (i_1 \cup \cdots \cup i_n) \subset C^+(i_1) \cap \cdots \cap C^+(i_n).$$

Así pues, la colección $(C^+(i))_{i \in I}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Consecuentemente, puede extenderse a un ultrafiltro F sobre I.

Consideremos el ultraproducto $\mathfrak{M}_F$ de $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ reducido por el ultrafiltro F. Veamos que $\mathfrak{M}_F \models T$.

En efecto, sea $\phi \in T$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $i_0 = \{\phi\}$. Resulta claro que

$$C^+(i_0) \subset \{i \in I | \mathfrak{M}_i \models \phi\}.$$

Por tanto, este último conjunto está en el ultrafiltro F. Por el Teorema de Łoś (relación (7)) se tiene que $\mathfrak{M}_F \models \phi$. $\square$

A esta presentación alternativa del Teorema de Completitud se le llama Teorema de Gödel-Henkin.