

# Sobre las desigualdades de Bell

Guillermo Morales-Luna  
Departamento de Computación  
(CINVESTAV-IPN)  
gmorales@cs.cinvestav.mx

4 de noviembre de 2019

## Resumen

Ilustramos diversas formas de las desigualdades de Bell.

## 1 Introducción

En su célebre artículo de 1935, Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) presentaron un resultado que contradecía la naturaleza *realista* y *local* de la física clásica. Los fenómenos físicos son *reales* en tanto que ellos quedan caracterizados por las mediciones que se tengan de todas sus propiedades. Puesto de manera burda en seudotérminos computacionales, los fenómenos son registros cuyas entradas son los valores medidos de sus propiedades. Los fenómenos son locales en cuanto a que dos de ellos estando suficientemente separados son independientes entre sí. Las mediciones que se hagan de las propiedades de uno no han de influir en las del otro. Estas supuestas paradojas originaron la controversia entre Bohr y Einstein acerca del carácter determinista de la Física. La paradoja EPR consistía en que la Mecánica Cuántica perdía características de realidad y de localidad. Podría haber un par de partículas que o bien tendrían propiedades sin valores determinados o bien los valores que asumiría una partícula determinarían unívocamente los correspondientes de la otra, independientemente de cuán alejadas estén una de la otra. Tales sistemas estarían *entrelazados*. En 1964 John Bell publicó un artículo donde mostraba que el análisis matemático de la Mecánica Cuántica era consistente con el entrelazamiento y posteriormente diversos experimentos mostraron que en realidad el análisis de Bell era compatible con la realidad física.

Presentamos aquí varias versiones de las desigualdades de Bell y las contrastamos con sus similares de tipo “clásico”.

## 2 Casos clásicos

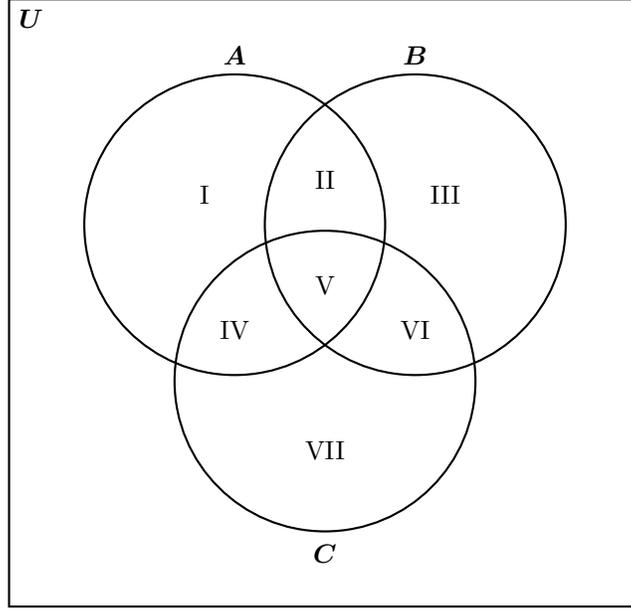
### 2.1 Conjuntos

Sea  $U$  un conjunto no-vacío, *universo*, finito. Sean  $A, B, C \subset U$  tres conjuntos en el universo. Entonces se cumple la, digamos, *desigualdad conjuntista de Bell*:

$$\text{card}(A - C) \leq \text{card}(A - B) + \text{card}(B - C). \quad (1)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} A - C &= A \cap C^c \\ &= (A \cap (B^c \cup B)) \cap C^c \\ &= ((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) \cap C^c \\ &= ((A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C^c)) \\ &\subseteq (A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) \\ &= (A - B) \cup (B - C) \end{aligned}$$



$$A - C = \text{I} \cup \text{II} \quad , \quad A - B = \text{I} \cup \text{IV} \quad , \quad B - C = \text{II} \cup \text{III}.$$

## 2.2 Lógica booleana

Supongamos, por otro lado, que se tiene tres preguntas  $p_i$ ,  $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$  y cada una con una posible respuesta  $r_i \in Q = \{0, 1\} = \{\text{No}, \text{Sí}\}$ . Cada  $r_i$  puede verse como una variable aleatoria  $\Omega \rightarrow Q$ , donde  $\Omega$  es un espacio de probabilidad conformado por las posibles *configuraciones de respuestas y respondentes* a las preguntas. Así, se tiene una variable aleatoria vectorial  $\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2) : \Omega \rightarrow Q^3$ . Evidentemente,  $\text{card}(Q^3) = 2^3 = 8$ . Consideremos los eventos siguientes:

$$\begin{aligned} A &= E_{01} = \{r_0 = r_1\} : \text{coinciden las respuestas primera y segunda,} \\ B &= E_{02} = \{r_0 = r_2\} : \text{coinciden las respuestas primera y tercera,} \\ C &= E_{12} = \{r_1 = r_2\} : \text{coinciden las respuestas segunda y tercera.} \end{aligned}$$

Supondremos que cada respuesta tiene una distribución uniforme,  $\Pr(r_i = \varepsilon) = \frac{1}{2}$  para cada  $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ ,  $\varepsilon \in Q$ , e independiente de las demás. Entonces, ya que los eventos  $A$ ,  $B$  y  $C$  han de ocurrir, cada uno, en exactamente 4 posibles configuraciones de respuestas, se tiene:

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Pero también, ya que en cualquier configuración de respuestas al menos dos han de coincidir, los tres eventos  $A, B, C$  forman un recubrimiento del espacio de probabilidad, por lo tanto:

$$1 = \Pr(A \cup B \cup C) \leq \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) = \frac{3}{2}. \quad (3)$$

De hecho, se ha de tener  $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$ , por lo cual se ve también que

$$1 = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - 2\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \frac{1}{2}.$$

Observamos trivialmente que no se podría tener, en vez de (2), que

$$\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = \frac{1}{4} \quad (4)$$

pues el análogo a (3) daría  $1 \leq \frac{3}{4}$  lo cual es absurdo.

### 3 Desigualdades físicas de Bell

Hay materiales radiactivos tales que cuando uno de sus átomos decae, éste emite una pareja de electrones, en direcciones opuestas. Una característica de un electrón es su *espín*. La pareja de electrones emitidas por el decaimiento de un átomo está *entrelazada* es decir, el espín de cada electrón es *opuesto* al del otro, de manera que el espín global de la pareja es nulo.

Supongamos elegidas tres direcciones para tomar mediciones de espines, digamos  $d_i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ . En cada dirección, un espín puede apuntar *hacia arriba*  $k = 1$ , o *hacia abajo*  $k = 0$ . Cada pareja de electrones consta, obviamente, de dos electrones  $e_j$ , con  $j \in \{0, 1\}$ . Así pues, para cada electrón  $e_j$  se tiene un correspondiente espacio de Hilbert  $\mathbb{H}_j$  complejo de dimensión 2. Consideremos en cada uno de esos dos espacios bases ortogonales correspondientes a cada dirección  $d_i$ , digamos  $\{\mathbf{e}_{ij0}, \mathbf{e}_{ij1}\}$  es la base de  $\mathbb{H}_i$  correspondiente a la dirección  $d_i$ . La pareja de electrones emitidos queda en el estado cuántico  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{H}_1$  que, expresado en cada base, es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{000} \otimes \mathbf{e}_{011} - \mathbf{e}_{001} \otimes \mathbf{e}_{010}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{100} \otimes \mathbf{e}_{111} - \mathbf{e}_{101} \otimes \mathbf{e}_{110}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{200} \otimes \mathbf{e}_{211} - \mathbf{e}_{201} \otimes \mathbf{e}_{210}) \end{aligned} \quad (5)$$

(los primeros índices en los vectores básicos señalan direcciones, los segundos electrones y los terceros espines).

En cada una de las expresiones en (5) al tomar una medición en la primera partícula ( $j = 0$ ), la segunda ( $j = 1$ ) asumirá el estado complementario, y viceversa. Es en este sentido que el par de partículas está *entrelazado*.

Por hacer una analogía con el caso discutido al final de la sección 2.2, las direcciones vienen a ser las preguntas y los estados medidos en cada partícula son las respuestas {No, Sí} que da cada partícula a ellas. Aunque, debido a la complementariedad de los espines de los electrones en cada pareja emitida, las respuestas (No, Sí) las consideraremos como (0, 1) en un electrón pero en el otro los invertiremos, es decir, como (1, 0).

Consideremos tres bases ortonormales del espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$  complejo de dimensión 2:

$$E : \begin{cases} \mathbf{e}_0 = (1, 0) \\ \mathbf{e}_1 = (0, 1) \end{cases}, \quad F : \begin{cases} \mathbf{f}_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1) \\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}) \end{cases}, \quad G : \begin{cases} \mathbf{g}_0 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{3}) \\ \mathbf{g}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1) \end{cases}$$

Las tres están orientadas positivamente,  $E$  es la base canónica,  $F$  es la base cuyo “vector horizontal” está a  $-30^\circ$  del canónico y  $G$  es la base cuyo “vector horizontal” está a  $-60^\circ$  del canónico. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_0 + \sqrt{3}\mathbf{g}_1) \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{2}(-\mathbf{f}_0 + \sqrt{3}\mathbf{f}_1) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1) \\ \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}(-\mathbf{g}_0 + \sqrt{3}\mathbf{g}_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{g}_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1) \\ \mathbf{g}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_0 + \sqrt{3}\mathbf{f}_1) \end{cases}$$

Ahora, supóngase por un momento que uno de los electrones se mide respecto a la base  $E$  y su complementario respecto a la base  $F$ , es decir  $\{\mathbf{e}_{000}, \mathbf{e}_{001}\} = E$  y  $\{\mathbf{e}_{110}, \mathbf{e}_{111}\} = F$ . Entonces, el estado cuántico del par es, de acuerdo con las relaciones (5)

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{000} \otimes \mathbf{e}_{011} - \mathbf{e}_{001} \otimes \mathbf{e}_{010})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_0^1) \quad (\text{el superíndice se refiere al segundo espacio}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbf{e}_0 \otimes \frac{1}{2} (-\mathbf{f}_0 + \sqrt{3}\mathbf{f}_1) - \mathbf{e}_1 \otimes \frac{1}{2} (\sqrt{3}\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \mathbf{e}_0 \otimes (-\mathbf{f}_0 + \sqrt{3}\mathbf{f}_1) - \mathbf{e}_1 \otimes (\sqrt{3}\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( -\mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{f}_0 + \sqrt{3}\mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{f}_1 - \sqrt{3}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_0 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1 \right)
\end{aligned}$$

por tanto, la probabilidad del evento  $A$  de que haya una misma respuesta para las dos primeras preguntas es la suma de los cuadrados de los coeficientes de  $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{f}_k$ , con  $k \in \{0, 1\}$ . Esta es  $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ . Similarmente, para las otras dos coincidencias. Tenemos pues la situación contradictoria dada por (4).

Esto marca una diferencia esencial entre la Mecánica Cuántica y la concepción clásica, digamos determinista, de la realidad física. Se tiene, en última instancia, que se viola alguno de los siguientes dos principios:

**Realidad:** Los espines de los electrones, vale decir, propiedades físicas de fenómenos, están determinados de antemano por la naturaleza de esos fenómenos.

**Localidad:** Las mediciones de una partícula son independientes de las mediciones de la otra.

## 4 Forma cuadrada de Clauser, Horne, Shimony y Holt

### 4.1 Enfoque determinista

Codifiquemos ahora los valores booleanos como  $Q = \{-1, 1\}$ , con el fin de que representen aplicaciones unitarias en  $\mathbb{R}$ , y definamos la forma, llamada *CHSH* [Clauser, Horne, Shimony, Holt],  $f : Q^2 \times Q^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,

$$[(a_0, a_1), (b_0, b_1)] \rightarrow f(a_0, a_1, b_0, b_1) = a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_1 b_1 - a_0 b_1 = [a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

cada pareja  $(x_0, x_1) \in Q^2$  puede verse como la de posibles valores de espín de una pareja de electrones.

Un cálculo directo muestra que en  $Q^2 \times Q^2$ ,  $|f| = 2$ . De hecho, para la mitad de valores se asume el valor  $-2$  y para la otra mitad  $2$ . Específicamente:

$a_0$	$a_1$	$b_0$	$b_1$	$a_0$	$a_1$	$b_0$	$b_1$
-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	1	1	1	1
$f = -2$				$f = 2$			

Ahora bien, fijo el valor de  $f$ , sólo para dos valores, de entre los ocho posibles, hay coincidencia de los valores de parejas  $(a_k, b_k)$ , con  $k \in \{0, 1\}$ . Así pues, fijo el valor de  $f$  la probabilidad de que haya coincidencia en tales parejas es  $\frac{1}{4}$ , lo que nos lleva también a una situación contradictoria dada por (4).

Ahora bien, al considerar  $a_0, a_1, b_0, b_1$  como variables aleatorias, dado que  $|f(a_0, a_1, b_0, b_1)| = 2$  necesariamente se ha de tener

$$|E(a_0 b_0) - E(a_0 b_1) + E(a_1 b_0) + E(a_1 b_1)| \leq 2 \quad (7)$$

por tanto, bajo la condición de que  $a_1$  y  $b_1$  han de coincidir,  $E(a_1 b_1) = 1$ , (7) dará

$$E(a_0 b_0) - E(a_0 b_1) \leq 1 - E(a_1 b_0)$$

lo que bajo la condición impuesta daría

$$E(a_0b_0) - E(a_0a_1) \leq 1 - E(a_1b_0) \quad (8)$$

y ésta es una expresión que parece contradecir la desigualdad conjuntista (1).

## 4.2 Enfoque cuántico entrelazado

Un operador *observable* es uno  $\mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_1$  que es autoadjunto. Recordamos las transformaciones de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Supongamos que, en función de sendos bits clásicos, Alicia puede aplicar a un fotón los operadores observables siguientes:

$$\alpha_0 = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y que Beto, igualmente, en función de sendos bits clásicos, puede aplicar a un fotón los operadores observables siguientes:

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con los bits elegidos, la pareja de fotones de Alicia y Beto se transformaría mediante las aplicaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \tau_{00} = \alpha_0 \otimes \beta_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \tau_{01} = \alpha_0 \otimes \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \tau_{10} = \alpha_1 \otimes \beta_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \tau_{11} = \alpha_1 \otimes \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considérese la base del espacio  $\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_1$  dada por los vectores de Bell:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 0 \ 0 \ 1)^T & \mathbf{b}_{01} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 0 \ 0 \ -1)^T \\ \mathbf{b}_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ 1 \ 1 \ 0)^T & \mathbf{b}_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ 1 \ -1 \ 0)^T \end{aligned}$$

vistos como vectores columnas.

Recordamos también, que dado un operador observable, digamos  $\gamma$ , la esperanza de su medición respecto a una dirección  $\mathbf{b}$  es

$$E_{\mathbf{b}}(\gamma) = \langle \mathbf{b} | \gamma \mathbf{b} \rangle.$$

De manera similar a la expresión a la izquierda de (7), para una dirección  $\mathbf{b} \in \mathbb{H}_2$  se define los operadores

$$\text{CHSH}_0(\mathbf{b}) = E_{\mathbf{b}}(\alpha_0 \otimes \beta_0) - E_{\mathbf{b}}(\alpha_0 \otimes \beta_1) + E_{\mathbf{b}}(\alpha_1 \otimes \beta_0) + E_{\mathbf{b}}(\alpha_1 \otimes \beta_1) \quad (10)$$

$$\text{CHSH}_1(\mathbf{b}) = -E_{\mathbf{b}}(\alpha_0 \otimes \beta_0) + E_{\mathbf{b}}(\alpha_0 \otimes \beta_1) + E_{\mathbf{b}}(\alpha_1 \otimes \beta_0) + E_{\mathbf{b}}(\alpha_1 \otimes \beta_1) \quad (11)$$

Entonces, se ve que

$$\begin{aligned} \text{CHSH}_0(\mathbf{b}_{00}) &= 2\sqrt{2} & \text{CHSH}_0(\mathbf{b}_{01}) &= 0 & \text{CHSH}_0(\mathbf{b}_{10}) &= 0 & \text{CHSH}_0(\mathbf{b}_{11}) &= -2\sqrt{2} \\ \text{CHSH}_1(\mathbf{b}_{00}) &= 0 & \text{CHSH}_1(\mathbf{b}_{01}) &= -2\sqrt{2} & \text{CHSH}_1(\mathbf{b}_{10}) &= 2\sqrt{2} & \text{CHSH}_1(\mathbf{b}_{11}) &= 0 \end{aligned}$$

es decir, para algunas direcciones entrelazadas, las formas cuadradas CHSH exceden la cota establecida por (7).

## 5 Un juego

Consideremos el juego siguiente. *Alicia y Beto* conforman un equipo de dos personas, es decir, conforman un sistema de dos partículas. En cada *tirada*:

- Alicia recibe un bit  $x \in \{0, 1\}$  y emite un bit  $a \in \{0, 1\}$ , y
- Beto recibe un bit  $y \in \{0, 1\}$  y emite un bit  $b \in \{0, 1\}$ .
- Si se cumple  $(a + b) \bmod 2 = xy$  entonces el equipo conformado por Alicia y Beto *gana*. En otro caso, *pierde*.

Por supuesto que si hubiera un medio de comunicación entre Alicia y Beto la estrategia trivial simple:

*Alicia envía a Beto sus bits  $x, a$ , y Beto emite el bit  $b = (xy + a) \bmod 2$*

haría ganar siempre al equipo Alicia–Beto, sin falla alguna, es decir  $\Pr(\text{gana}) = 1$ .

Supongamos pues que no haya comunicación entre Alicia y Beto.

**Una primera estrategia** “Alicia y Beto tiran a la buena de dios”: *Independientemente de los bits recibidos,  $x, y$ , Alicia selecciona aleatoriamente  $a \in \{0, 1\}$  y Beto igualmente selecciona aleatoriamente  $b \in \{0, 1\}$ .*

En este caso, descompongamos los casos posibles según se hayan elegido los bits  $x, y, a$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \Pr(\text{gana}) &= \sum_{\varepsilon \in Q^3} \Pr(b = (xy + a) \bmod 2 \ \& \ (x, y, a) = \varepsilon) \\ &= \sum_{\varepsilon \in Q^3} \Pr(b = (xy + a) \bmod 2 \mid (x, y, a) = \varepsilon) \Pr((x, y, a) = \varepsilon) \\ &= \sum_{\varepsilon \in Q^3} \frac{1}{2} \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así pues esta estrategia, la más elemental de todas, es equivalente a “echarse un volado”.

**Una segunda estrategia** “Alicia complementa y Beto repite”: Los jugadores acuerdan de antemano que *Alicia emite el complemento del bit que recibe,  $a = (1 + x) \bmod 2$  y Beto repite el que recibe  $b = y \in \{0, 1\}$ .*

En este caso, descompongamos los casos posibles según los bits recibidos  $x, y$ . Se tiene:

- *Caso  $x = 0$  e  $y = 0$* : Se tiene  $xy = 0$  y

$$a + b = 1 + x + y = 1 \neq 0 = xy$$

por tanto el equipo pierde.

- *Caso  $x = 0$  e  $y = 1$* : Se tiene  $xy = 0$  y

$$a + b = 1 + x + y = 1 + 1 = 0 \bmod 2 = xy$$

por tanto el equipo gana.

- *Caso  $x = 1$  e  $y = 0$* : Se tiene  $xy = 0$  y

$$a + b = 1 + x + y = 1 + 1 = 0 \bmod 2 = xy$$

por tanto el equipo gana.

- *Caso  $x = 1$  e  $y = 1$* : Se tiene  $xy = 1$  y

$$a + b = 1 + x + y = 1 + 1 + 1 = 1 \bmod 2 = xy$$

por tanto el equipo gana.

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{gana}) &= \sum_{\varepsilon \in Q^2} \Pr(y = (xy + 1 + x) \bmod 2 \ \& \ (x, y) = \varepsilon) \\
&= \Pr(y = (xy + 1 + x) \bmod 2 \mid (x, y) = (0, 0)) \Pr((x, y) = (0, 0)) + \\
&\quad \Pr(y = (xy + 1 + x) \bmod 2 \mid (x, y) = (0, 1)) \Pr((x, y) = (0, 1)) + \\
&\quad \Pr(y = (xy + 1 + x) \bmod 2 \mid (x, y) = (1, 0)) \Pr((x, y) = (1, 0)) + \\
&\quad \Pr(y = (xy + 1 + x) \bmod 2 \mid (x, y) = (1, 0)) \Pr((x, y) = (1, 0)) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Por mera simetría, se ve que pasaría lo mismo si es Beto quien complementa y Alicia quien repite.

El lector podría reflexionar acerca de si existe alguna otra estrategia, ya sea determinista o probabilista, que mejore esa probabilidad de gane. Sin embargo,  $\frac{3}{4}$  es una cota superior a la probabilidad de gane con cualquier enfoque “clásico”.

Ahora consideremos:

**Una estrategia cuántica** “Alicia y Beto explotan entrelazamiento”: Los jugadores preparan un par de partículas entrelazadas. El estado cuántico del par es

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{00} + \mathbf{e}_{11}).$$

Para un ángulo  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  se considera el operador unitario, consistente de una rotación en sentido levógiro un ángulo  $\theta$ , así como la identidad:

$$U_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es evidente que  $U_\theta^H U_\theta = I$ . La estrategia es la siguiente: *Si Alicia recibe el bit  $x = 1$ , entonces aplica la rotación  $U_\theta$  a su qubit, y en otro caso no hace nada. Si Beto recibe el bit  $y = 1$ , entonces aplica la rotación inversa  $U_\theta^H$  a su qubit, y en otro caso no hace nada. Alicia toma una medición a su qubit, respecto a la base canónica, y emite el bit correspondiente. Beto emite el bit que le queda en su qubit.*

Se tiene entonces que al final de la estrategia, se ha aplicado el operador

$$\begin{aligned}
I \otimes I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ si } (x, y) = (0, 0) & \quad U_\theta \otimes I = \begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0 \\ 0 & c & 0 & -s \\ s & 0 & c & 0 \\ 0 & s & 0 & c \end{bmatrix} \text{ si } (x, y) = (1, 0) \\
I \otimes U_\theta &= \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \text{ si } (x, y) = (0, 1) & \quad U_\theta \otimes U_\theta = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -cs & -s^2 \\ -cs & c^2 & s^2 & -cs \\ cs & s^2 & c^2 & cs \\ -s^2 & cs & -cs & c^2 \end{bmatrix} \text{ si } (x, y) = (1, 1)
\end{aligned}$$

donde  $c = \cos(\theta)$  y  $s = \text{sen}(\theta)$ . El estado cuántico al final del proceso será entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_f &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\
\mathbf{b}_f &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c, -s, s, c) & \text{si } (x, y) = (1, 0) \\
\mathbf{b}_f &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c, -s, s, c) & \text{si } (x, y) = (0, 1) \\
\mathbf{b}_f &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c^2 - s^2, -2cs, 2cs, c^2 - s^2) & \text{si } (x, y) = (1, 1)
\end{aligned}$$

En el caso particular en que  $\theta = \frac{\pi}{8}$ , se ha de tener  $c = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$  y  $s = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ . En consecuencia, el estado final ha de ser

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_f &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \mathbf{b}_f &= \left( \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, & -\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, & \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, & \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) & \text{si } (x, y) = (1, 0) \\ \mathbf{b}_f &= \left( \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, & -\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, & \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}, & \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) & \text{si } (x, y) = (0, 1) \\ \mathbf{b}_f &= \left( \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \right) & \text{si } (x, y) = (1, 1) \end{aligned}$$

El equipo Alicia-Beto gana el juego si la medición final hace que se llegue a cualquiera de los estados  $\mathbf{e}_{00}$  o  $\mathbf{e}_{11}$  (los extremos izquierdo y derecho en el listado anterior). Por tanto, la probabilidad de gane es

$$\begin{aligned} \Pr(\text{gana}) &= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \left( \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \left( \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left[ 1 + 4 \left( \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2} + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{8} (5 + \sqrt{2}) \end{aligned} \tag{12}$$

y ya que  $1 < \sqrt{2}$ , se tiene  $\frac{3}{4} < \frac{1}{8} (5 + \sqrt{2})$ . La relación dada por (12) fija una cota propia de una *desigualdad de Bell*.

## 6 Argumento de Bell

Supongamos un fenómeno parametrizado por vectores en  $\mathbb{R}^n$ , que al ser medido respecto a una dirección, o “detector”, en  $\mathbb{R}^n$  produce un valor:  $v_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \{-1, +1\}$ ,  $\mathbf{p} \mapsto v_1(\mathbf{p})$  y que para un par de instancias  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  el valor medido conjuntamente del sistema formado por esa pareja posee una esperanza, digamos estadística:

$$E_e(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = -\langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle. \tag{13}$$

Así por ejemplo, si se tratase de un par de fotones emitido en el experimento de Stern-Gerlach (el espín de un fotón ha de ser opuesto al del otro), y  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$  es un vector unitario, entonces  $E_e(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = -1$ .

Supongamos, por otro lado, que  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  es un conjunto parametrizando evoluciones, para entrar en ideas primarias de la Mecánica Cuántica, se le puede ver como uno correspondiente a una variable oculta, con una propia función de densidad probabilista  $\rho : \Lambda \rightarrow [0, 1]$ . Supongamos también que el valor que asume una instancia del fenómeno depende de un parámetro en el conjunto  $\Lambda$ . Se tiene pues una propia función  $\alpha : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}$ ,  $(\mathbf{p}, \lambda) \mapsto \alpha(\mathbf{p}, \lambda)$ . Dada una pareja de dichos fenómenos, se tiene correspondientes funciones  $\alpha_0, \alpha_1 : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}$ . La esperanza de correlación de ambas partículas ha de ser entonces

$$\forall (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = \int_{\Lambda} \alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_1(\mathbf{p}_1, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \tag{14}$$

Se tiene:

- $|E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)| \leq \int_{\Lambda} |\alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda)| |\alpha_1(\mathbf{p}_1, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda \leq 1.$
- $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = -1 \iff \alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) = -\alpha_1(\mathbf{p}_1, \lambda) \text{ } \lambda\text{-c.t.p.}$

Supongamos, finalmente, que  $\alpha_0 = -\alpha_1$  (como se da en el caso de Stern-Gerlach). Entonces (14) queda

$$\forall (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = - \int_{\Lambda} \alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (15)$$

Para  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$  se ha de tener:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) - E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) &= \int_{\Lambda} [\alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) - \alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \left[ \frac{\alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda)}{\alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda)} - 1 \right] \alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \left[ \frac{\alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda)}{\alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda)} - 1 \right] \alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} [\alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) - 1] \alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) - E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2)| &\leq \int_{\Lambda} |\alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) - 1| |\alpha_0(\mathbf{p}_0, \lambda) \rho(\lambda)| d\lambda \\ &\leq \int_{\Lambda} |\alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) - 1| \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} [1 - \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda - \int_{\Lambda} \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \\ &= 1 + E(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \end{aligned} \quad (16)$$

De hecho, al hacer  $\Lambda_{=} = \{\lambda \in \Lambda \mid \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) = \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda)\}$ ,

$$|\alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) - 1| = 0 \iff \lambda \in \Lambda_{=} \iff 1 - \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) = 0,$$

y

$$|\alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) - 1| = 2 \iff \lambda \notin \Lambda_{=} \iff 1 - \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) = 2,$$

Luego

$$\int_{\Lambda} |\alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda) - 1| \rho(\lambda) d\lambda = 2\rho(\Lambda - \Lambda_{=}) = \int_{\Lambda} [1 - \alpha_0(\mathbf{p}_1, \lambda) \alpha_0(\mathbf{p}_2, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda.$$

Consideremos la desigualdad establecida por los extremos en (16):  $|E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) - E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2)| \leq 1 + E(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . Comparemos un promedio  $\overline{E}_e(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$  de  $E_e(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$  dada por (13), respecto a  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_1$ , y un promedio  $\overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$  de  $E(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$  dada por (14), respecto a  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_1$ . Si acaso se tuviera

$$|\overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) - \overline{E}_e(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |\overline{E}_e(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) + \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle| \leq \delta \quad (17)$$

se tendría también

$$|\overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) + \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle| \leq (\varepsilon + \delta). \quad (18)$$

De manera similar a (16) se prueba que, para un tercer  $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^n$ , se tendrá:

$$|\overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) - \overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2)| \leq 1 + \overline{E}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \varepsilon + \delta. \quad (19)$$

Naturalmente,

$$\langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_2 \rangle - \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle = (\overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) + \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_2 \rangle) - (\overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) - \overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)) - (\overline{E}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) + \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle)$$

de donde, por (18) y (19),

$$|\langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_2 \rangle - \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle| \leq (\varepsilon + \delta) + (1 + \overline{E}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \varepsilon + \delta) + (\varepsilon + \delta) \leq 1 - \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_2 \rangle + 4(\varepsilon + \delta)$$

o sea

$$|\langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_2 \rangle - \langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle| + \langle \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2 \rangle - 1 \leq 4(\varepsilon + \delta). \quad (20)$$

En particular, si se toma  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_2$  perpendiculares y  $\mathbf{p}_1$  a “ $45^\circ = \frac{\pi}{4}$  radianes” de ambos  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_2$ , se ha de tener  $\langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_2 \rangle = 0$  y  $\langle \mathbf{p}_0 | \mathbf{p}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \langle \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2 \rangle$ , luego (20) dará  $\sqrt{2} - 1 \leq 4(\varepsilon + \delta)$ , lo cual marca un impedimento a que  $\varepsilon$  y  $\delta$  sean arbitrariamente pequeñas simultáneamente.

En resumen, bajo las condiciones (13)–(15), que implican (16), no se podría tener simultáneamente las relaciones en (17) para  $\varepsilon$  y  $\delta$  arbitrariamente pequeñas.

Sin embargo, si experimentalmente se comprobase que pueden lograrse simultáneamente las relaciones (17), para  $\varepsilon$  y  $\delta$  arbitrariamente pequeñas, entonces el “principio de localidad” (14) ha de ser excluido.

Vale mencionar que esta situación excluyente está apareciendo bajo la suposición de que en la expresión (15) las funciones de densidad  $\alpha_0$  y  $\rho$  son las mismas para las tres caracterizaciones involucradas. En diversos análisis se busca suprimir esa suposición con el propósito de hacer compatibles la localidad y el fenómeno de entrelazamiento.

Por otro lado, sobresimplifiquemos todo lo anterior, con las suposiciones siguientes:

- $E$  y  $E_e$  definidas en (13) y (14) coinciden, y
- $\mathbf{p}_1$  es un vector situado entre  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_2$ , y estos tres son vectores unitarios.

Sea  $\theta_{ij}$  el ángulo tendido por los vectores  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_j$ . Entonces  $\theta_{12} = \theta_{02} - \theta_{01}$ . Entonces la desigualdad (16) asume la forma

$$|\cos(\theta_{02}) - \cos(\theta_{01})| \leq 1 + \cos(\theta_{02} - \theta_{01}). \quad (21)$$

Consideremos pues la función

$$T : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (\theta_{01}, \theta_{02}) \mapsto T(\theta_{01}, \theta_{02}) = 1 + \cos(\theta_{02} - \theta_{01}) - |\cos(\theta_{02}) - \cos(\theta_{01})|. \quad (22)$$

Ya que la función coseno es par,  $T$  es una función conmutativa:  $T(\theta_{01}, \theta_{02}) = T(\theta_{02}, \theta_{01})$ .

En la Figura 1 presentamos la gráfica de  $T$ . En (a) aparece en una imagen tridimensional y en (b) aparece por contornos. Se aprecia que en los cuadrantes Primero y Tercero, la función  $T$  es negativa, por lo que la desigualdad (21) sólo es válida en los cuadrantes Segundo y Cuarto, es decir, sólo vale cuando  $\text{Sgn}(\theta_{02}) \neq \text{Sgn}(\theta_{01})$ .

En la Figura 2 presentamos las gráficas de las funciones seccionales  $\theta_{01} \mapsto T(\theta_{01}, -\frac{\pi}{2})$ , en (a), y  $\theta_{01} \mapsto T(\theta_{01}, +\frac{\pi}{2})$ , en (b). Debido a la conmutatividad de  $T$ , las seccionales cuando  $\theta_{01} = -\frac{\pi}{2}$  y  $\theta_{01} = +\frac{\pi}{2}$  son iguales.

Tenemos pues una incompatibilidad elemental entre las relaciones (13)–(15) con (16).

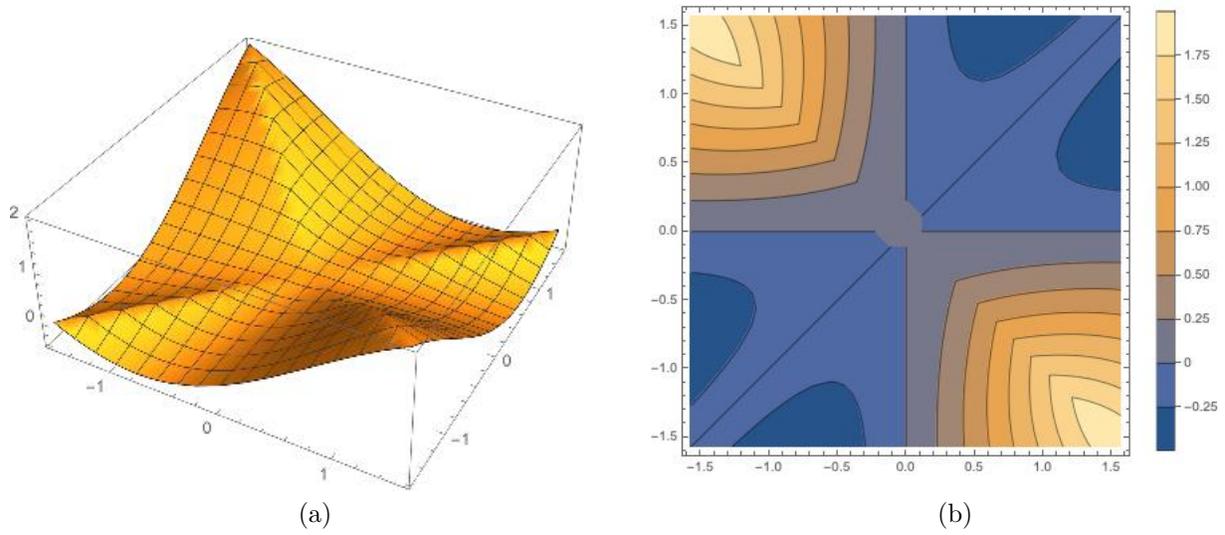


Figure 1: Gráfica de la función  $T : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

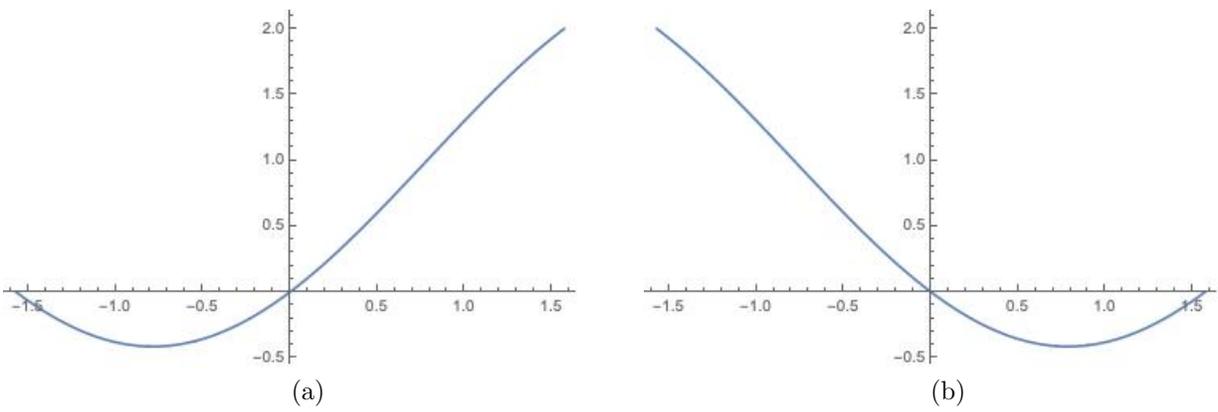


Figure 2: Gráficas de las funciones seccionales en los valores extremos.