Relación de dos cuboides en una sola imagen

Dr. Luis Gerardo de la Fraga
Departamento de Computación, Cinvestav

14 de enero, 2013

Resumen

Veremos las ecuaciones necesarias para referir un cuboide con respecto a otro cuando aparecen dos cuboides en una imagen, o dos cuboides en dos imágenes diferentes.

1. Introducción

Exiten dos casos:

1. Dos cuboides iguales en una misma imagen o en dos imágenes distintas.
2. Dos cuboides diferentes en una misma imagen o en dos imágenes distintas.

El primer punto es más sencillo, pero más restrictivo al suponer que los dos cuboides tienen el mismo tamaño.

2. Dos cuboides iguales

En este caso las ecuaciones que representan a los cuboides son:

$$\lambda_1 \mathbf{p}_1 = K[R_1|\mathbf{t}_1]L_1\mathbf{P}_1 \tag{1}$$

$$\lambda_2 \mathbf{p}_2 = K[R_2|\mathbf{t}_2]L_2\mathbf{P}_2 \tag{2}$$

En estas dos ecuaciones $K, R_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. R_i representan matrices de rotación. K es la matriz de calibración de la cámara, y es igual en las dos ecuaciones porque estamos viendo la escena con una misma cámara. $\mathbf{P}_i$ representan puntos tridimensionales homogéneos $[x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$ y $\mathbf{p}_i$ puntos bidimensionales homogéneos $[u, v, 1]^{\mathrm{T}}$. $L_i \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Dado que los dos cuboides son iguales $L_1 = L_2 = L$.

También, en las ecuaciones (1) y (2), $\mathbf{p}_i$, con $i = 1, 2$, representan los puntos de los vértices del cuboide i; estos puntos son vistos en la imagen de los cuboides. Los puntos $\mathbf{P}_i$, con $i = 1, 2$, representan los vértices del modelo 3D del cuboide unitario.

Antes de ver la relación entres los dos cuboides, se presenta esta definición que será muy útil.

Definición 1. Una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{c|c} R & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \tag{3}$$

representa una rotación y translación de un punto $\mathbf{P}$ a otro $\mathbf{P}'$. Note que esta matriz es de tamaño 4×4.

Resulta muy fácil verificar esta definición:

$$\mathbf{P}' = \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} R & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \mathbf{P}$$

El procedimiento de calibración [1], y visto en clase, para cada cuboide nos entrega los valores para K, ambas matrices de rotación R_1 y R_2, los dos vectores de translación $\mathbf{t}_1$ y $\mathbf{t}_2$. Como K es igual para ambos cuboides, se debería tomar el correspondiente al cuboide que se ve más grande sobre la imagen (y que por lo tanto se ve menos influido por el ruido en las posiciones de los puntos).

Para poner ambos cuboides en un mismo marco de referencia, podemos escoger cualquiera de ellos como el origen del sistema de coordenadas. Supongamos que el origen del sistema global será el correspondiente al primer cuboide. Entonces debemos de encontrar las transformación

$$T_3 = \left[\begin{array}{c|c} R_3 & \mathbf{t}_3 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]. \tag{4}$$

Es decir, vamos a escontrar la matriz R_3 y el vector $\mathbf{t}_3$ tal que el primer cuboide, ya rotado por R_1 y transladado por $\mathbf{t}_1$, generen lo que se ve en la imagen como el segundo cuboide.

La transformación que se aplica usando la ecuación (1) al primer cuboide puede reescribirse entonces como:

$$\mathbf{P}''_1 = T_1 \mathbf{P}'_1 = \left[\begin{array}{c|c} R_1 & \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \mathbf{P}'_1. \tag{5}$$

Y la transformación que se aplica al segundo cuboide es:

$$\mathbf{P}''_2 = T_2 \mathbf{P}'_2 = \left[\begin{array}{c|c} R_2 & \mathbf{t}_2 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \mathbf{P}'_2. \tag{6}$$

En las expresiones anteriores (5) y (6) $\mathbf{P}'_i = L \cdot \mathbf{P}_i$, para $i = \{1, 2\}$.

Entonces, tenemos que hallar la transformación T_3 tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}''_2 &= T_3 T_1 \mathbf{P}'_1 = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} R_3 & \mathbf{t}_3 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_1 & \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \mathbf{P}'_1 = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} R_3 R_1 & R_3 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \mathbf{P}'_1 \end{aligned}$$

Igualando los elementos de la matriz obtenida con los elementos correspondientes de la matriz de la eq. (6), obtenemos:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_3 R_1, \\ R_3 &= R_2 R_1^{-1} = R_2 R_1^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

y el vector $\mathbf{t}_3$ se calcula de

$$\begin{aligned} R_3 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3 &= \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{t}_3 &= \mathbf{t}_2 - R_3 \mathbf{t}_1 = \\ \mathbf{t}_3 &= \mathbf{t}_2 - R_2 R_1^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_1 \end{aligned}$$

Entonces, la matriz que relaciona los dos cuboides, tomando el primer cuboide como referencia es:

$$\left[\begin{array}{c|c} R_2 R_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{t}_2 - R_2 R_1^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right].$$

2.1. Formulación alternativa

La matriz que relaciona los dos cuboides, tomando como referencia el primer cuboide, es la misma matriz que debe aplicarse al segundo cuboide para que el primer cuboide tenga como matriz de rotación $R_1 = I$ y $\mathbf{t}_1 = \mathbf{0}$.

Entonces, si aplicamos T_g al sistema de coordenada global tendríamos $P_1'' = T_1 T_g P_1'$, y el producto $T_1 T_g$ es igual a:

$$T_1 T_g = \left[\begin{array}{c|c} R_1 & \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_g & \mathbf{t}_g \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] =$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} R_1 R_g & R_1 \mathbf{t}_g + \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right].$$

Y si queremos que $T_1 T_g = \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$, tenemos que $R_1 R_g = I$ y $R_g = R_1^{-1} = R_1^{\mathrm{T}}$. Y el vector de translación es igual a $R_1 \mathbf{t}_g + \mathbf{t}_1 = \mathbf{0}$, por lo que $\mathbf{t}_g = -R_1^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_1$.

La transformación T_g queda entonces como

$$\left[\begin{array}{c|c} R_1^{\mathrm{T}} & -R_1^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

Y aplicando esta transformación al sistema de coordenadas global para el segundo cuboide, tenemos:

$$T_2 T_g = \left[\begin{array}{c|c} R_2 & \mathbf{t}_2 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} R_1^{\mathrm{T}} & -R_1^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_1 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] =$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} R_2 R_1^{\mathrm{T}} & -R_2 R_1^{\mathrm{T}} \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right].$$

La visualización de las transformacions T_3 y T_g se observan en la figura 1. En esta figura se visualizan las transformaciones en dos dimensiones, pero se generalizan sin problemas

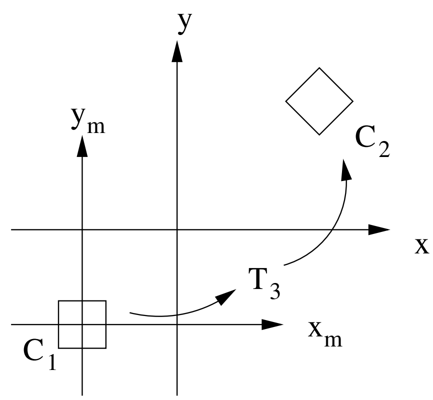

Figura 1: La visualización de ambas transformaciones T_3 y T_g. Detalles en el texto.

a 3D. La transformación T_3 es la transformación que cambia al cuboide (en el caso de la figura 1 es un cuadrado) C_1 para que aparezca como el cuboide C_2. La transformación T_g es la transformación que se aplica globalmente para poder el sistema de coordenadas global en el cuboide C_1.

3. Dos cuboides distintos

Para este caso se cumplen las mismas ecuaciones vistas en la sección anterior, excepto ahora que $L_1 \neq L_2$ y debemos relacionar los largos de los lados del segundo cuboide con respecto a alguno de los lados del primer cuboide.

Los lados de los cuboides, representados en la matriz L, se calculan como

$$\mu = L^{\mathrm{T}} L = \lambda X^{\mathrm{T}} \cdot K^{-\mathrm{T}} \cdot K^{-1} \cdot X.$$

Y las dos matrices X_1 y X_2, correspondientes a cada cuboide, pueden escalarse simplemente dividiendo cada una entre el término $X_i(3,3)$ correspondiente, para poner $X_1(3,3) = X_2(3,3) = 1$

De esta forma, los lados de los dos cuboides estarán dados con respecto al largo, digamos, del largo $l_x = L(1,1)$ del primer cuboide.

Referencias

[1] M. Wilczkowiak, P. Sturm, and E. Boyer. Using geometric constraints through parallelepipeds for calibration and 3d modeling. *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intel.*, 27(2):194–207, Feb 2005.