

Construcción del Diagrama de Voronoi

Dr. Luis Gerardo de la Fraga

27 de julio de 2005

Resumen

Apuntes de la clase de como construir el diagrama de Voronoi. Se demuestra por construcción geométrica de que es posible construir óptimamente, en un tiempo proporcional a $O(n \log n)$, n el número de puntos, el diagrama de Voronoi. De Preparata & Shamos, *Computational Geometry, an introduction*, 1985, Springer.

1 Introducción

Para construir óptimamente el diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos S , aplicamos la estrategia *divide y vencerás*. El procedimiento quedaría de la siguiente manera:

$\text{Vor}(S)$

Paso 1 Particionar S en dos subconjuntos S_1 y S_2 , de igual tamaño aproximadamente, usando la media de la coordenada x .

Paso 2 Construir $\text{Vor}(S_1)$ y $\text{Vor}(S_2)$ recursivamente

Paso 3' Construir la cadena poligonal σ que separa S_1 y S_2 .

Paso 3'' Descargar todas las aristas de $\text{Vor}(S_2)$ que yacen a la izquierda de σ y todas las aristas de $\text{Vor}(S_1)$ que yacen a la derecha de σ . El resultado es $\text{Vor}(S)$, el diagrama de Voronoi del conjunto total.

Claramente el resultado de $\text{Vor}(S)$ depende de que se pueda construir la cadena poligonal σ (el paso 3') en un tiempo proporcional a $O(n)$.

2 Demostración geométrica

En la Fig. 1 se representa el diagrama de Voronoi de 18 puntos (este fue construido con el programa *qhull*)

El conjunto total de puntos se divide en dos conjuntos, en este caso de 9 puntos cada uno. Los diagramas de Voronoi de cada subconjunto se muestran en la Fig. 2

En la Fig. 3 se muestra la línea poligonal σ sobre los dos diagramas de Voronoi de los subconjuntos derecho e izquierdo de puntos. Los extremos de σ coinciden con los bisectores perpendiculares a las líneas que unen las cubiertas convexas de S_1 y S_2 . Esta última afirmación puede verificarse observando la Fig. 4.

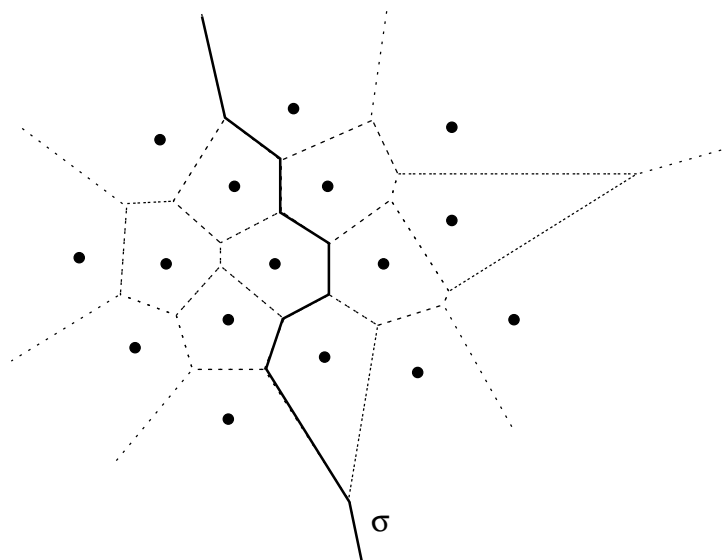


Figura 1: Ejemplo de un diagrama de Voronoi. La línea gruesa indica la cadena poligonal que separa a S_1 y S_2 .

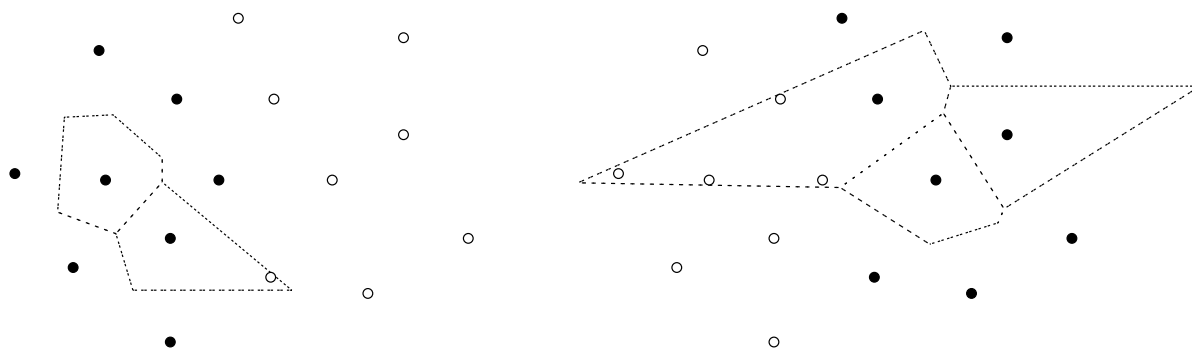


Figura 2: Diagramas de Voronoi de los subconjuntos S_1 y S_2 . Las líneas que unen puntos al infinito no han sido dibujadas

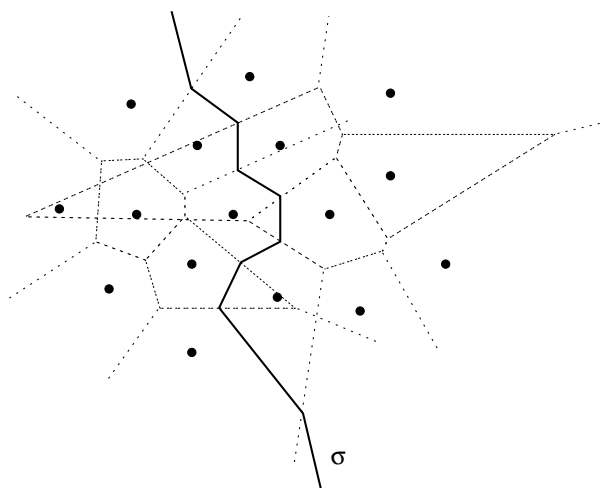


Figura 3: Composición donde se han encimado los dos diagramas de Voronoi de los subconjuntos S_1 y S_2 , y se ha trazado también σ (la línea gruesa)

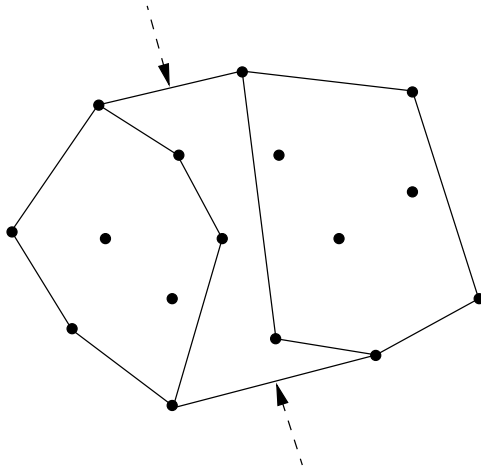


Figura 4: Las cubiertas convexas de S_1 y S_2 . Las flechas indican los extremos de la línea poligonal σ .

Es posible observar en la Fig. 3 que σ se va construyendo con la intersección de sus extremos con las aristas de Voronoi de S_1 y S_2 . La rutina detallada para realizar esto se encuentra en el libro de texto.