Continuidad

Si dos segmentos de curva se unen, la curva tiene *continuidad geométrica* G^0. Si las direcciones (pero no necesariamente las magnitudes) de los vectores tangente a los dos segmentos son iguales en el punto de unión, la curva tiene continuidad geométrica G^1. En el diseño de objetos por computadora, se requiere frecuentemente la continuidad G^1 entre segmentos de curva. Continuidad G^1 significa que las pendientes geométricas de los segmentos de curva son iguales en el punto de unión. Para que dos vectores tangente TV_1 y TV_2 tengan la misma dirección, es necesario que uno sea un múltiplo escalar de otro: $TV_1 = k \cdot TV_2$, con $k > 0$.

Si los vectores tangente a dos segmentos de curva cúbicos son iguales (i.e. sus direcciones y magnitudes son iguales) en el punto de unión, la curva tienen continuidad de primer grado en el parámetro t, o *continuidad paramétrica*, y se le llama continuidad C^1. Si la dirección y magnitud de $d^n/dt^n[Q(t)]$ en la n-ésima derivada son iguales en el punto de unión, la curva se la llama C^n *continua*.

En general, la contunidad C^1 implica la G^1, pero lo inverso generalmente no es verdad. Esto es, la continuidad G^1 es generalmente menos restrictiva que la C^1, de forma que las curvas pueden tener la G^1 pero no necesariamente la C^1. Sin embargo, los puntos de unión con continuidad G^1 parecerán tan suaves como los de continuidad C^1.

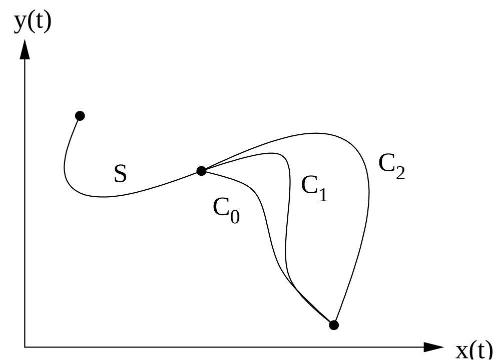

Figura 1: El segmento de curva S unido a los segmentos C_0, C_1 y C_2 con los grados de continuidad paramétrica 0, 1 y 2, respectivamente. La distinción visual entre C_1 y C_2 es pequeña en el punto de unión pero muy obvia lejos del punto de unión

B-splines uniformes no racionales

El spline cúbico natural es un polinomio cúbico con continuidad C^0, C^1 y C^2 que interpola (pasa a través) de sus puntos de control. Esto es un grado más de continuidad de la que ya es inherente en las formas Hermite y Bézier. Entonces, los splines son inherentemente más suaves que los formas previas.

Los coeficientes polinomiales para los splines cúbicos naturales, sin embargo, son dependientes de todos los n puntos de control; su cálculo conlleva invertir una matriz de $n+1$ por $n+1$. Esto tiene sus desventajas: mover cualquier punto de control afecta la curva entera y el tiempo de cómputo necesario para invertir la matriz puede interferir con el rápido reformado interactivo de una curva.

Los B-splines, consisten de segmentos de curva cuyos coeficientes polinomiales dependen de sólo cinco puntos. Moviendo un punto de control afecta sólo una pequeña parte de la curva, y el tiempo necesario para calcular los coeficientes se reduce grandemente.

Los B-splines cúbicos aproximan una serie de $m+1$ puntos de control $P_0, P_1, \ldots, P_m$, $m \geq 3$, con una curva que consiste de $m-2$ segmentos de curva cúbicos polinomiales $Q_3, Q_4, \ldots, Q_m$. La amplitud del parámetro en la cual Q_i está definido es $t_i \leq t < t_{i+1}$, para $3 \leq i < m$. En el caso particular de $m = 3$, hay un solo segmento de curva Q_3 que está definido sobre el intervalo $t_3 \leq t \leq t_4$ para cuatro puntos de control, desde P_0 a P_3.

Para cada $i \geq 4$, hay un punto de unión o *nudo* entre Q_{i-1} y Q_i en el valor de parámetro t_i, el valor del parámetro en tal punto se le llama *valor de nudo*. Los puntos inicial y final en t_3 y t_{m+1} también se les llama nudos, de manera que hay un total de $m-1$ nudos.

El término *uniforme* significa que los nudos están igualmente espaciados a intervalos del parámetro t. El término *no racional* es usado para distinguir estos splines de los generados con curvas cúbicas polinomiales racionales. La "B" viene de *base*, ya que los splines pueden representarse como sumas ponderadas de funciones base polinomiales, en contraste de los splines naturales, para los cuales esta afirmación no es verdad.

Cada $m-2$ segmentos de curva de una curva $B-splines$ está definida por cuatro de los $m+1$ puntos de control. En particular, el segmento de curva Q_i está definido por los puntos P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1} y P_i, entonces el vector de geometría para el B-spline, B_{Bs_i}, para el segmento Q_i es

$$B_{Bs_i} = \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_{i-0} \end{bmatrix}, \qquad 3 \leq i < m \qquad (1)$$

El primer segmento de curva, Q_3, esta definido por los puntos P_0 a P_3 sobre la amplitud del parámetro $t_3 = 0$ a $t_4 = 1$, Q_4 estña definido por los puntos P_1 a P_4 sobre la amplitud del parámetro $t_4 = 1$ a $t_5 = 2$, y el último segmento de curva, Q_m, está definido por los puntos P_{m-3}, P_{m-2}, P_{m-1}, P_m sobre el intervalo del parámetro $t_m = m-3$ a $t_{m+1} = m-2$. En general, el segmento de curva Q_i comienza en algún lugar cerca del punto P_{i-2} y termina en algún lugar cerca del punto P_{i-1}.

Cada punto influencía cuatro segmentos de curva. Mover un punto en una dirección dada mueve los cuatro segmentos que éste afecta; los otros segmentos permanecen totalmente inafectados.

Si T_i es el vector columna $[(t-t_i)^3 \quad (t-t_i)^2 \quad (t-t_i) \quad 1]$ entonces la formulación del B-spline para el segmento de curso i es:

$$Q_i(t) = T_i \cdot M_{Bs} \cdot G_{Bs_i}, \quad t_i \leq t < t_{i+1} \quad (2)$$

La curva entera se genera aplicando la ecuación (2) para $3 \leq i \leq m$.

La matriz base B-spline es

$$M_{Bs} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

que relaciona las restricciones geométricas G_{Bs} a las funciones base con los coeficientes polinomiales M_{Bs}.

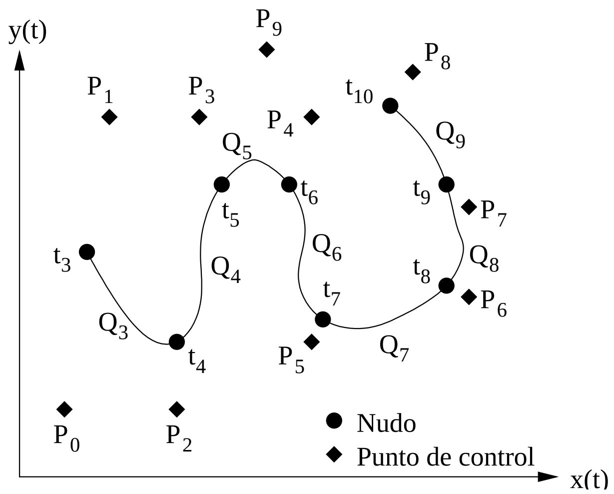

Figura 2: Un B-spline con segmentos de curva Q_3 a Q_9. Esta figura fue hecha con el programa Xfig.

Las funciones generatrices B-spline están dadas por el producto $T_i \cdot M_{Bs}$:

$$\begin{aligned} B_{Bs} &= T \cdot M_{Bs} = \\ &= [B_{Bs_{-3}} \quad B_{Bs_{-2}} \quad B_{Bs_{-1}} \quad B_{Bs_0}] \\ &= \frac{1}{6}[(1-t)^3 \quad 3t^3 - 6t^2 + 4 \quad -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1 \quad t] \end{aligned} \tag{4}$$

para $0 \leq t < 1$. Nótese que para cada segmento i, la amplitud de los valores de $t - t_i$ van desde 0 en $t = t_i$ a 1 en $t = t_{i+1}$ y reemplazando cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ por $[0, 1]$.